کنترل کیفیت آماری | مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف کیفیت: هر چند کیفیت مفهوم پیچیده و چندگانه‌ای دارد اما در طی تاریخ پیدایش این شاخه از علم افراد صاحب‌نظر از دیدگاه‌های متفاوت به تعریف کیفیت پرداخته‌اند.

الف) کیفیت دو جنبه عینی و ذهنی دارد. عینیت یک شی واقعیتی است که شی را بوجود آورده و ذهنیت در مورد یک شی مطلوبیت یا ارزش خواص فیزیکی آن است این دو مفهوم رابطه تنگاتنگی دارند.

این تعریف توسط شوهارت (Shewhart 1931) ارائه شده است

ب) کیفیت همان مناسب کاربرد است.

این تعریف توسط جوران و گرینا (Juran and Gryna) ارائه شده است.

ج) کیفیت تطابق با نیازهایی است که به صورت مشخصات طراحی بیان می‌شود. این تعریف توسط کراسبی (Crasby 1979) ارائه شده است.

د) کیفیت دارای جنبه‌های هشت‌گانه، **طراحی- عملکرد- ویژگی‌ها- پایایی- تطابق- دوام- قابلیت تغییرپذیری و نگهداری زیبایی و شهرت** می‌باشد و با توجه به نیاز مشتری بر اساس جنبه خاصی کاربرد پیدا می‌کند این تعریف توسط گاروین (Garvin 1984) ارائه شده است.

هـ) کیفیت باید بر نیازهای حال و آینده مشتری متمرکز باشد چراکه مشتری مهم‌ترین بخش یک خط تولید است.

این تعریف توسط دمینگ (Deming-1986) ارائه شده است.

و) کیفیت ضرری است که یک محصول از زمانی که به بازار می‌آید، در جامعه بوجود می‌آورد. پراکندگی و تغییرپذیری عامل ایجاد این ضرر است.

این تعریف توسط تاگوچی (Taguchi 1987) ارائه شده است.

ز) کیفیت به همه آن ویژگی‌هایی از محصول اعم از کالا یا خدمات گفته می‌شود که می‌توانند نیازهای تعریف شده‌ای را برآورده سازند.

این تعریف توسط انجمن کیفیت آمریکا در سال ۱۹۸۷ ارائه شده است.

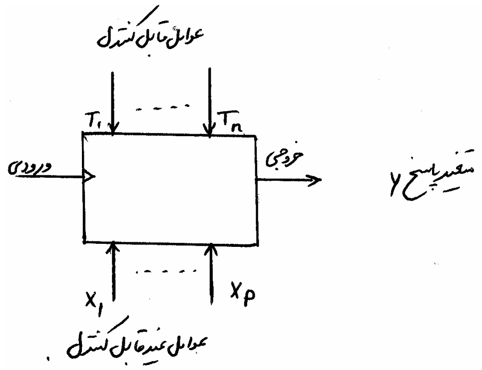
به هر حال در به کارگیری واژه کیفیت باید به تمایز میان کیفیت طراحی و کیفیت انطباق توجه کرد. وقتی می‌گوییم کیفیت پژو از پیکان بهتر است کیفیت طراحی موردنظر است و وقتی می‌گوییم پژوی تولید تهران از مشهد بهتر است منظور کیفیت انطباق است.

از دیدگاه دانشمندان جامعه آمریکایی، هزینه‌های کیفیت به دو حوزه گسترده تقسیم می‌شود که هر کدام دارای بخش‌هایی می‌باشند.

هزینه‌های انطباق با مشخصه
- طراحی و اجرای نظام کیفیت
- ارزیابی، سنجش، حسابرسی

هزینه‌های عدم انطباق با مشخصه
- خرابی درونی مثل دوباره‌کاری، خرابی قطعه‌ها
- خرابی بیرونی مثل نارضایتی مشتری ـ گارانتی

شاید بهترین تعریف از آن تاگوچی باشد که پراکندگی و تغییرپذیری را نماد عدم کیفیت می‌داند یعنی هر چه پراکندگی و تغییرپذیری بیشتر باشد کیفیت پایین‌تر است. برای توضیح بیشتر این تعریف به الگویی از یک سیستم تولیدی توجه کنید.



لازم است عوامل غیرقابل کنترل (X_i ها) که اغتشاش نیز نامیده می‌شوند را قدری شرح دهیم. این عوامل به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف) عوامل محیطی مثل درجه حرارت و رطوبت که عملکرد محصول را خراب می‌کنند و یا تفاوت‌های موجود بین محصولات مشابه می‌باشد.

ب) عوامل داخلی مثل فرسوده شدن محصول که باعث می‌شود عملکرد موردنظر را نداشته باشد.

متغیر پاسخ **Y** از آن‌جا که تحت تاثیر این عوامل غیرقابل کنترل است یک متغیر تصادفی است که تغییرات آن توسط یک توزیع آماری بیان می‌شود که می‌توان در بعضی از مسائل آن را نرمال در نظر گرفت σ,μ میانگین و انحراف معیار مشخصه متغیر **Y** هستند. با توجه به آن‌که در توزیع نرمال می‌دانیم $P(|Y-\mu|\le 3\sigma)=0.9973$ معمولاً حدود 3σ یا $\pm 3\sigma$ حول μ را **حدود طبیعی تحمل یا حدود مشخصه فنی** می‌نامند. و آن‌ها را با USL و LSL نشان می‌دهند. حدود مشخصه فنی بر اساس ویژگی‌های محصول توسط طراح و سازنده تعیین می‌شود.

می‌توان دید $P(|Y-\mu|\le 6\sigma)=0.999999998$ یعنی در حدود 6σ نرخ عدم انطباق فرایند 0.002ppm یا 2 در میلیارد است.

(Parts Per million)

شش سیگما

به تعداد گام‌ها با واحد σ از μ تا نزدیک‌ترین حد مشخصه فنی **سطح سیگما** گفته می‌شود.

محور بررسی و تحلیل‌ها در شش سیگما فرآیند می‌باشد و کاهش خطا در فرآیندها موجب کاهش خطا در سازمان می‌شود. این کاهش خطا در چرخه DMAIC شکل می‌گیرد در واقع از نظر مفهومی این چرخه از چرخه‌های بهبود شوهارت (Plan-Do-Check-Act) و دمینگ (Plan-Do-Study- Act) الهام گرفته است مراحل پنج‌گانه این چرخه عبارتند از:

Define	Measure	Analyze	Improve	Control
(تعریف)	(اندازه‌گیری)	(تحلیل)	(بهبود)	کنترل

بر اساس به‌کارگیری روش 6σ انتظار می‌رود. نرخ معیوب و هزینه‌های تولید کاهش یافته در نتیجه کارایی و سوددهی بالا رود و در نهایت رضایت مشتری تامین گردد.

تاریخچه پیدایش روش‌های آماری برای بهبود کیفیت

هر چند از زمانی که تولید مطرح شده است انسان به فکر کیفیت آن بوده است اما روش‌های آماری به‌طور مشخص از ابتدای قرن ۲۰ برای بهبود کیفیت مطرح شده‌اند.

از دیدگاه فیگنباوم تاریخچه کنترل کیفیت را می‌توان در ۵ دوره خلاصه نمود.

الف) دوره کنترل کیفیت کارگری در سال‌های قبل از ۱۹۰۰

ب) دوره کنتر کیفیت سرکارگری در سال‌های ۱۹۲۰ ـ ۱۹۰۰

ج) دوره کنترل کیفیت بازرسی در سال‌های ۱۹۴۰ـ۱۹۲۰

د) دوره کنترل کیفیت آماری در سال‌های ۱۹۸۰ـ۱۹۴۰

هـ) دوره کنترل کیفیت جامع در سال‌های بعد از سال ۱۹۸۰

اقدامات دانشمندان بسیاری در شکل‌گیری این دوره‌ها نقش اساسی داشته است.

در جدول زیر خلاصه‌ای از این اقدامات مطرح شده‌اند.

ردیف	نام دانشمند	سال	عنوان
۱	شوهارت	۱۹۲۴ تا ۱۹۳۲	معرفی نمودارهای کنترل و کاربردهای آن در تولید
۲	دوج و رومیگ	۱۹۲۸	روش بازرسی نمونه‌ای و ارائه جدول مربوطه
۳	ماگیل	۱۹۴۵	برگزاری همایش یک هفته‌ای با هدف بالا بردن کیفیت خدمات ارتباطات ژاپن
۴	دمینگ	۱۹۵۰	تدریس روش‌های کنترل کیفیت آماری درژاپن و تاسیس جایزه دمینگ توسط اتحادیه مهندسان و دانشمندان ژاپن JUSE
۵	جوران و گرینا	۱۹۵۷	انتشار کتاب راهنمای کنترل کیفیت
۶	تاگوچی	۱۹۸۰	معرفی نتایج تحقیقات گسترده در زمینه کاربرد طراحی آزمایشات در کنترل کیفیت در سطوح دانشگاه‌های آمریکا
۷	باکس	۱۹۸۶	توسعه کاربردهای طرح آزمایش‌ها در کنترل کیفیت پس از دیدار ژاپن

مدیریت کیفیت جامع TQM (Total Quality management)

بررسی‌های سال‌های اخیر روی مفهوم کیفیت و چگونگی پرداختن گروه‌های متفاوت دانشمندان در ژاپن و آمریکا ابتدا موجب پیدایش کنترل کیفیت جامع (TQC) و سپس باعث بوجود آمدن کنترل کیفیت سراسری شرکت‌ها (CWQC) شد.

بعد از تکامل این مراحل موضوع مورد توافق، "مدیریت کیفیت جامع" TQM می‌باشد که سازمان‌ها را در عرصه رقابت مورد حمایت قرار می‌دهد.

این موضوع ضمن ارائه محصولی با کیفیت قابل قبول مشتری و برآورده ساختن انتظارات او می‌تواند هزینه‌ها را به‌طور خردمندانه‌ای مدیریت کند.

فلسفه مدیریت کیفیت جامع در تمام بخش‌های سازمان بایستی تاثیرگذار باشد به‌طوری که ضمن حمایت مستمر از کیفیت در تمام سطوح مدیریتی و مشتری مداری بتواند کارایی لازم را با بهینه‌سازی و ایجاد استانداردهای فرآیندی تعیین نماید.

ابعاد هشت‌گانه کیفیت

گاروین (Garvin) در سال ۱۹۸۷ برای کیفیت ۸ بعد معرفی نموده است او هر بعد را با یک سوال مطرح کرده است.

۱ـ عملکرد

آیا محصول می‌تواند وظیفه موردنظر را انجام دهد؟

۲ـ قابلیت اطمینان

هر چند وقت یک‌بار محصول خراب می‌شود؟

۳ـ قابلیت دوام

چه مدت محصول دوام می‌آورد؟

۴ـ قابلیت تغییرپذیری

به چه سادگی می‌توان محصول را تفسیر کرد؟

۵ـ زیبایی

محصول چگونه به‌نظر می‌رسد؟

۶ـ ویژگی‌ها

محصول چه کارهایی انجام می‌دهد؟

۷ـ انطباق با استانداردها

آیا محصول دقیقاً همان‌گونه که موردنظر طراح بوده است تولید گردیده است؟

۸ـ کیفیت درک شده

محصول یا شرکت از چه شهرتی برخوردار است؟

تشخیص این ابعاد از مهم‌ترین مراحل مدیریتی یک سازمان است.

انواع روش‌های آماری مفید برای کنترل کیفیت

۱ـ روش‌های حین تولید (On-Line. Quality Control) این روش‌ها غالباً بر اساس هفت ابزار قدیمی از طریق کاهش پراکندگی و تغییرات موجب بالا رفتن کیفیت در حال تولید می‌شوند.

۲ـ روش‌های قبل از تولید (Off-Line quality Control) این روش‌ها غالباً با استفاده از طراحی آزمایش‌ها و توسط دانشمندان ژاپنی از جمله تاگوچی مطرح شده است.

در این روش‌ها عوامل موثر بر کیفیت توسط طرح‌های فاکتوریل شناسایی می‌شوند. اقدامات لازم برای تاثیرگذاری روی مشخصه‌های کیفی محصول در مرحله طرح پیشنهاد می‌گردد.

ایشی‌کاوا بر اساس تجربه می‌گوید ″حدود 95% مسائل کیفیت در کارخانه‌ها می‌تواند از طریق به‌کارگیری هفت ابزار قدیمی حل شود″

به روش‌های فوق **کنترل فرایند آماری** نیز گفته می‌شود.

۳ـ نمونه‌گیری برای پذیرش

این روش‌های نمونه‌گیری صرفاً برای رد یا قبول یک محموله بوجود آمده‌اند و به‌طور مستقیم روی بالا بردن کیفیت اثر زیادی ندارند. این روش‌ها بیشتر از آن‌که کنترل کیفیت را مطرح کنند بازرسی را دنبال می‌کنند.

ابزار هفت‌گانه کنترل فرآیند (Statistical Process Control)

در این بخش ابزار هفت‌گانه قدیمی را جهت کنترل فرایند آماری (SPC) مرور می‌کنیم. SPC از طریق کاهش تغییرپذیری می‌تواند در جهت بهبود کارایی و ایجاد ثبات قدم بردارد.

این ابزار که توسط منابع غیرژاپنی پدید آمده‌اند توسط ژاپنی‌ها بیشتر از بقیه به‌کار رفته‌اند دکتر ایشی‌کاوا که سابقه خیلی زیادی در به‌کارگیری این ابزار و تمرکز بر روش‌های مقداری در صنعت ژاپن دارد معتقد است با به‌کارگیری این روش‌ها تا حدود 95% از مسائل کیفیت را حل می‌نماید. ابزار هفت‌گانه SPC عبارت‌اند از:

۱ـ برگه کنترل

۲ـ نمودار تمرکز نقص‌ها

۳ـ هیستوگرام

۴ـ نمودار پارتو

۵ـ تحلیل علت و معلول

۶ـ نمودار پراکندگی

۷ـ نمودارهای کنترل

در ادامه به توضیح این روش‌ها به صورت مختصر می‌پردازیم.

۱ـ برگه کنترل

در مراحل اولیه برای جمع‌اوری و ثبت داده‌ها از برگه کنترل استفاده می‌شود. بدیهی است با توجه به آن‌که از این داده‌ها اطلاعات پیدا می‌شود و تصمیم‌گیری و اقدامات بعدی نیازمند اطلاعات است. برگه کنترل از نظر چگونگی ثبت و جمع‌آوری در گام‌های بعدی اهمیت زیادی دارد. رعایت ترتیب زمانی ثبت داده‌ها کارهای بعدی را هموارتر می‌کند. درج اطلاعات ضروری از قبیل نام کالا ـ تاریخ ـ تعداد ـ نام بازرس در برگه کنترل مفید است. برگه کنترل مناسب که با توجه به ماهیت و نوع داده‌ها تنظیم می‌شود. می‌تواند تحلیل داده‌ها را آسان و دقیق ادامه دهد. تعدادی از انواع برگه داده‌ها عبارتند از:

الف) برگه کنترل توزیع فرآیند تولید

ب) برگه کنترل اقدام معیوب

ج) برگه کنترل مکان و علت عیب

د) برگه کنترل بازرسی

۲ـ نمودار تمرکز نقص‌ها

این نمودار تصویری از محصول است که تمام نماهای موردنظر را نشان می‌دهد مثلاً اگر محصول یک تلویزیون باشد این نمودار تصویر آن را از همه نماها (عقب ـ جلو ـ بالا ـ پایین ـ چپ و راست) نشان می‌دهد و لذا می‌توان محل یا محل‌های ایجاد عیب را بر روی محصول معین کرد و با تجزیه و تحلیل آن‌ها اطلاعات مفیدی در مورد علل بالقوه ایجاد عیب‌ها کسب کرد. در این نمودار اغلب از رنگ‌های مختلف برای نشان دادن عیوب مختلف استفاده می‌شود.

نمودارهای تمرکز نقص‌ها ابزار مناسبی برای رفع مشکل در صنایعی نظیر آبکاری، رنگ‌کاری ـ ماشین‌کاری و مونتاژ به‌حساب می‌آید.

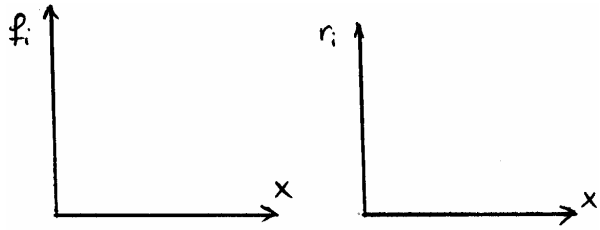
۳ـ هیستوگرام (بافت نگار)

هیستوگرام نمایش مستطیلی داده‌های دسته‌بندی شده است و توسط آن سه ویژگی از داده‌ها به سادگی مشاهده می‌شود.

الف) شکل توزیع تجربی داده‌ها

ب) پارامترهای مکانی یا تمایل مرکز توزیع

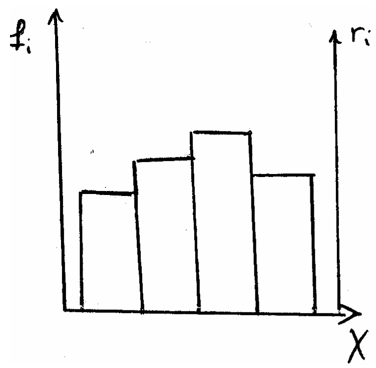
ج) پارامترهای پراکندگی توزیع



معمولاً هیستوگرام را به دو صورت رسم می‌کنند وقتی محور yها فراوانی مطلق داده‌ها باشد (f_i) هیستوگرام فراوانی و وقتی محور yها فراوانی نسبی داده‌ها باشد (r_i) هیستوگرام فراوانی نسبی گفته می‌شود.

حدود مشخصه فنی بر اساس ویژگی‌های موردنظر توسط طراح تعیین می‌شود.

لازم به ذکر است می‌توان هر دو نوع هیستوگرام را همزمان رسم کرد کافی است دو محور عمودی در نظر گرفته یکی را به f_i و دیگری را به r_i اختصاص دهیم.



روش رسم هیستوگرام

۱ـ تعداد دسته‌ها با توجه به n (تعداد داده‌ها) و R (دامنه تغییرات $R = X_{max} - X_{min}$) عدد دلخواهی بین 4 تا 20 در نظر گرفته شود.

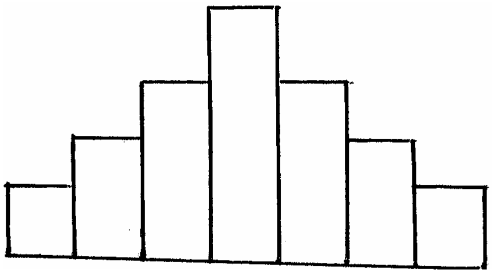
یک روش پیشنهادی برای تعداد دسته‌ها استفاده از فرمول $K = 1.322\log_{10}^{n}$ که به دستور استورجس شهرت دارد می‌باشد. روش پیشنهادی دیگر $K = \sqrt{n}$ می‌باشد.

۲ـ بهتر است طول هر دسته برابر باشد بنابراین فرمول $W = \frac{R}{K}$ برای طول دسته‌ها مناسب می‌باشد.

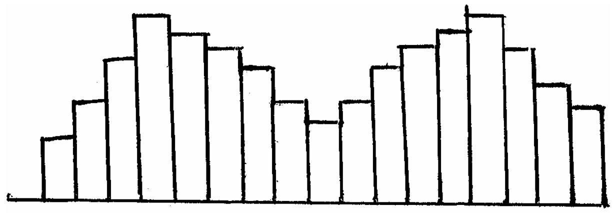
۳ـ نصف دقت واحد اندازه‌گیری از کوچک‌ترین عضو هر دسته کاسته و به بزرگترین عضو هر دسته افزوده شود تا مرزها پیدا شوند مثلاً اگر داده‌ها بر حسب میلی‌متر اندازه‌گیری شده‌اند و قرار است دسته اول شامل داده‌های فاصله $(4,8)$ می‌توان دسته اول را $(4.5,8.5)$ در نظر گرفت.

تذکر: موقعی از هیستوگرام استفاده می‌شود که تعداد داده‌ها حداقل 20 باشد چون خلاصه نمودن باعث از بین رفتن جزئیات می‌شود. وقتی تعداد داده‌ها کم است توزیع فراوانی‌ها را بر اساس داده‌های دسته‌بندی نشده پیدا کنید.

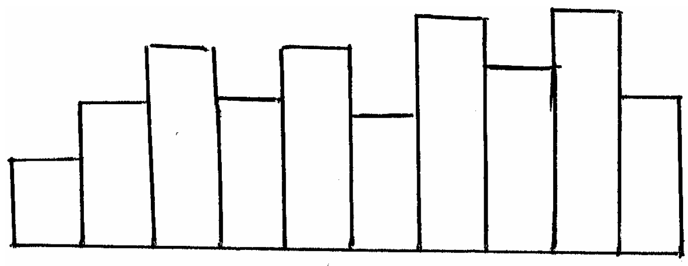
شماری از انواع الگوهای هیستوگرام در شکل زیر نشان داده شده است.



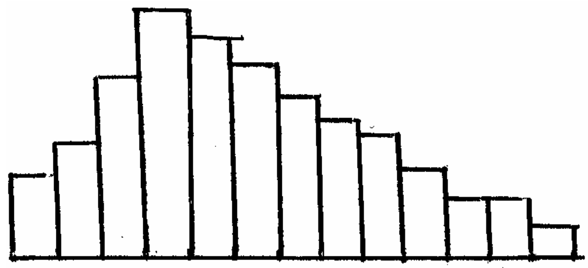
هیستوگرام زنگوله‌ای (نرمال)



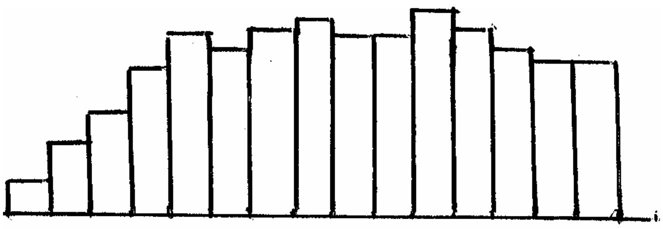
هیستوگرام دونمایی



شانه‌ای



چولگی مثبت



فلات

الف) **نرمال** تقریباً میانه و میانگین و مد منطبقند و شکل از تقارن قابل قبولی برخوردار است. در اغلب مسائل این نوع هیستوگرام مطلوب است.

ب) **دونمایی** فراوانی در وسط کم و در دو طرف حالت قله وجود دارد این هیستوگرام وقتی ایجاد می‌شود که دو توزیع با میانگین‌های متفاوت ترکیب شده باشند.

ج) **شانه‌ای،** در این هیستوگرام فراوانی از یک دسته به دسته دیگر به صورت یک در میان تناوب دارند. شاید به دلیل وجود یک روند ویژه در روش روند کردن داده‌ها این حالت به‌وجود آمده باشد.

د) **چولگی مثبت،** شکل قرینه نیست و هر چه به سمت مقادیر بزرگتر X می‌رویم فراوانی کاهش می‌یابد.

این هیستوگرام وقتی بوجود می‌آید که حد پایین به دلیل مسائل تئوری و یا مشخصات فنی کنترل شده باشند و یا مقادیر بیشتر از حد معینی ایجاد نشوند

هـ) **فلات،** وجود فراوانی برابر در دسته‌های نزدیک هم فلات ایجاد می‌کند و به غیر از دسته‌های ابتدا و انتهایی بقیه تقریباً برابر هستند این شکل وقتی پیدا می‌شود که چندین توزیع با میانگین‌های متفاوت ادغام شده باشد.

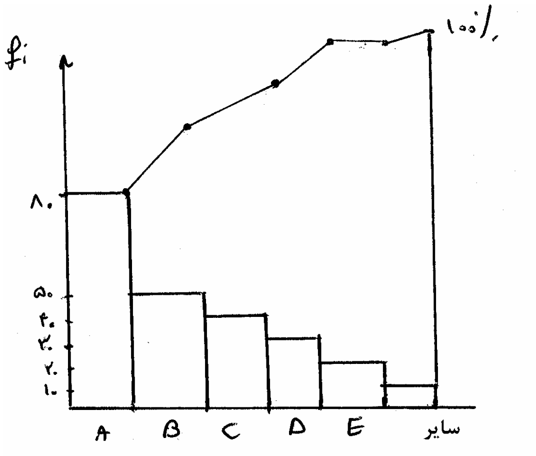
۴ـ نمودار پارتو

نمودار پارتو یک هیستوگرام است که برای داده‌های کیفی به‌کار می‌رود و داده‌ها را از چپ به راست به ترتیب نزولی مرتب می‌کند و برای شناسایی پرهزینه‌ترین عامل مثلاً علت نقص یا ابزار یا دستگاه یا افراد به‌کار می‌رود.

روش رسم این نمودار به شرح زیر است.

این نمودار دارای یک محور افقی (مربوط به X) با تقسیم‌بندی برابر و دو محور عمودی در سمت چپ و راست می‌باشد. محور عمودی سمت چپ مربوط به فراوانی مطلق f_i و محور عمودی سمت راست به صورت درصد فراوانی تجمعی نسبی $\left(G_i = \frac{F_i}{n} 100\right)$ می‌باشد.

سطوح مختلف متغیر بر حسب f_i ها به طور نزولی از چپ به راست مرتب می‌شوند. نمودار خط شکسته‌ای انتهای هر مستطیل را بر حسب G_i به‌طور صعودی رسم می‌کند. نمودار پارتو زیر می‌تواند انواع علت‌های وجود عیب در یک تولید را نشان دهد.



همان‌طور که پیداست علل A و B بیشترین دلیل وجود نقص و عیب در تولید است. اما باید توجه کنید که این نمودار نمی‌تواند مهم‌ترین عیب را به تنهایی پیدا کند بلکه عیبی را که بیشتر ظاهر شده نشان می‌دهد.

و برای یافتن اهمیت عیب‌ها باید تحلیل هزینه‌ها را نیز در نظر داشت.

اصل پارتو

دانشمند معروف ایتالیایی بر اساس مطالعات خود در علم اقتصاد و توزیع ثروت می‌گوید 20% مردم ثروت زیاد و 80% مردم ثروت اندک دارند.

اصل پارتو که قاعده بیست هشتادی هم نامیده می‌شود توسط دانشمندان کنترل کیفیت مانند جوران تایید شد. جوران به‌جای مردم 20% عبارت اقلیت ضروری (Vital few) و به‌جای مردم 80% عبارت اکثریت مفید (Useful Many) یاد کرد.

برخی از کاربردهای تحلیل توسط نمودار پارتو عبارتند از:

الف) بهبود کارایی

ب) نگهداری و تعمیرات

ج) هدایت اصلاح عیوب از طریق مقایسه

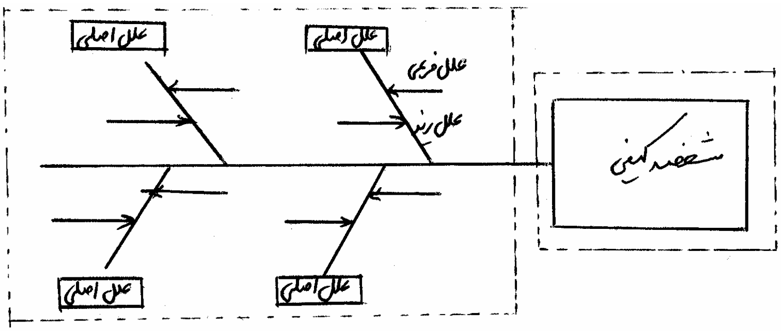
لازم به ذکر است اگر نمودار پارتو عاملی را بیشتر از بقیه نشان دهد.

باید اقدامات اصلاح آن عامل را آن‌قدر ادامه داد تا در نمودارهای بعدی ترتیب این ستون‌ها عوض شود. البته اگر ترتیب هم عوض نشود ولی ارتفاع مستطیل‌ها کاهش یابد باز هم اصلاح موثر بوده است.

۵ـ نمودار علت و معلول

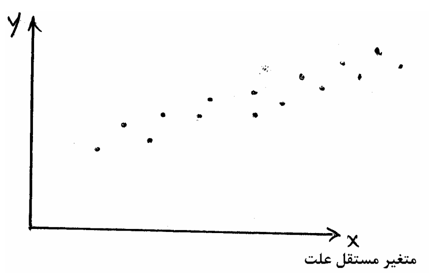
در یک فرآیند، پاسخ یا خروجی تحت تاثیر عوامل متعددی قرار دارد که می‌توان بین آن‌ها ارتباط علت و معلولی برقرار کرد.
به نموداری که ارتباط میان یک مشخصه کیفی و عوامل موثر بر آن را نشان می‌دهد نمودار علت و معلول گفته می‌شود.
این نمودار که به آن نمودار اسکلت ماهی هم می‌گویند در سال ۱۹۵۳ توسط ایشی‌کاوا در صنعت ژاپن معرفی شد و امروزه کاربرد وسیعی در همه شاخه‌ها دارد.
برای رسم این نمودار ابتدا یک مشخصه کیفی را تعیین می‌کنند و آن را به‌عنوان معلول در نظر گرفته داخل یک مستطیل در سمت راست قرار می‌دهند.
سپس عوامل اصلی و اولیه را که روی معلول اثر دارند به عنوان استخوان‌های بزرگ درون مربع‌هایی در دو طرف خط اصلی (ستون فقرات ماهی) می‌نویسند. بعد از آن عوامل فرعی را به‌عنوان زیرشاخه علت مانند استخوان‌های کوچک قرار می‌دهند و پس از تحلیل و بررسی علت‌ها به وزن‌دهی اولویت‌گذاری روی آن‌ها پرداخته می‌شود. در شکل زیر یک نمودار علت و معلول به صورت کلی رسم شده است.

در تعیین عوامل اصلی و فرعی بایستی از روش طوفان مغزی (Brainstorming) کمک گرفت. هر چند برای یافتن عوامل اصلی می‌توان از نمودارپارتو نیز کمک گرفت.

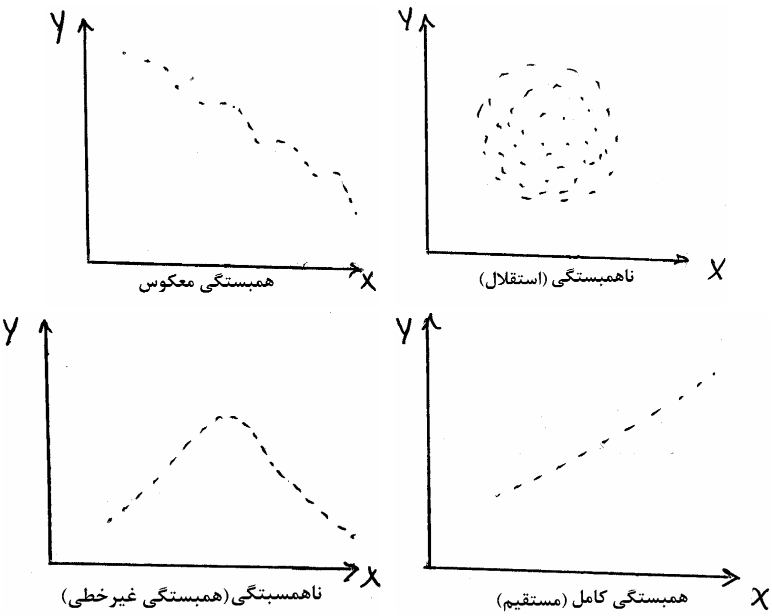


۶ـ نمودار پراکندگی (پراکنش)

در این نمودار می‌توان دو متغیر را به صورت همزمان مشاهده کرد تا روند تعامل آن‌ها و شرایط بهینه در روی شکل بررسی گردد.
در حقیقت این نمودار می‌تواند نوع رابطه بین دو متغیر را تا حدودی تعیین کند. یعنی پس از آن‌که در نمودار علت و معلول توانستیم علت‌های مهم را شناسایی کنیم توسط این نمودار می‌توانیم نوع رابطه بین آن‌ها را مشخص کنیم تا نحوه کنترل علت برای بهینه‌سازی معلول را به‌کار بریم.
روش رسم این نمودار به این گونه است که متغیر مستقل (علت) را روی محور افقی و متغیر وابسته (معلول) را روی محور عمودی قرار می‌دهیم و داده‌های (مشاهده) را به صورت نقطه در این دستگاه رسم می‌کنیم.



شکل بالا وجود رابطه مستقیم را بین X و Y نشان می‌دهد. انواع همبستگی‌ها را می‌توان در نمودارهای زیر مورد توجه قرار داد.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود وقتی همبستگی کامل است که مشاهده است روی یک خط مستقیم باشند. و ناهمبستگی یعنی عدم وجود رابطه خطی بین متغیرها.

۷ـ نمودارهای کنترل

تعریف فرآیند

مجموعه‌ای از عناصر تولید که شامل مواد اولیه ـ روش‌ها ـ نیروی انسانی و ماشین‌ها می‌باشد را فرآیند گویند.

تعریف کنترل

به‌منظور حفظ استانداردها و ایجاد و نگهداشتن مشخصه‌های تولید روش‌ها و تدابیری به‌کار گرفته می‌شود که به آن‌ها کنترل می‌گویند. نمودار کنترل نموداری است که اطلاعات بدست آمده از فرآیند تولید با حدود کنترل مقایسه می‌شود تا بتوانیم وضعیت تولید را از نظر کیفیت کنترل کنیم.

انحرافات فرآیند تولید
- تصادفی
- با دلیل

منظور از انحرافات تصادفی تغییرات ناشی از عوامل غیرقابل کنترل است که بسیار جزیی می‌باشند البته شاید این انحرافات از عواملی پدید آمده که کنترل آن‌ها مقرون به صرفه نمی‌باشد. مثلاً تفاوت‌های جزئی در مواد اولیه می‌تواند عامل انحرافات جزیی در تولید باشد. و منظور از انحرافات با دلیل تغییرات ناشی از عوامل قابل کنترل است که معمولاً تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی تولید می‌گذارند مثلاً مواد اولیه نامرغوب می‌تواند تاثیر زیادی روی تولید بگذارد.

نمودارهای کنترل می‌توانند بین انحرافات با دلیل و انحرافات تصادفی تمایز ایجاد کنند.

وقتی فقط انحرافات تصادفی وجود دارند و فرآیند تحت کنترل است. با توجه به آن‌که می‌دانیم در توزیع نرمال درصدهای زیر در حدود انحراف از میانگین صدق می‌کنند.

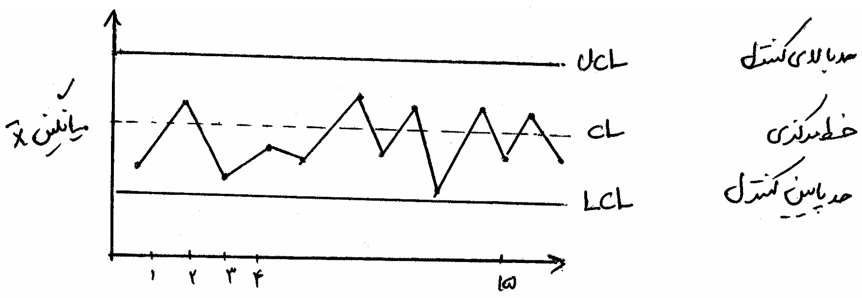
$$P(|X-\mu|<\sigma)=0.6826$$

$$P\left(\left|X-\mu\right|<2\sigma\right)=0.9546$$

$$P\left(\left|X-\mu\right|<3\sigma\right)=0.9973$$

اگر فقط انحرافات تصادفی موجود باشد، با فرض برقراری توزیع نرمال انتظار می‌رود 99.73% مقادیری که در این نمودار رسم می‌شود بین حدود کنترل قرار دارند. این ضریب اطمینان آنقدر خوب است که برای تمایز انحرافات تصادفی با دلیل از حدود $\pm3\sigma$ انحراف معیار بهره می‌گیرند.

شکل زیر یک نمودار کنترل را نشان می‌دهد که فرآیند تحت کنترل است.



نمودارهای کنترل که در فصل بعدی به‌طور مفصل شرح داده می‌شود در واقع به کنترل آماری فرایند (SPC) مربوط است. البته SPC زیر مجموعه فعالیت‌های کلی‌تر است که به کنترل کیفیت آماری SQC (Statistical Quality Control) معروف است که در دوره اخیر به آن بهبود کیفیت آماری SQI هم می‌گویند. این نمودارها توسط شوهارت تنظیم شده است.

نکته: مراحل استفاده از نمودارها به‌صورت تکمیل‌کننده یکدیگر به شرح زیر است.

نمودار پاره‌تو

نمودار علت و معلول

نمودار همبستگی

نمودارهای کنترل

تست‌های پایان فصل اول

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر از جمله جنبه‌های کیفیت می‌باشند؟

۱) طراحی، عملکرد، بازرسی، پایایی

۲) تطابق، دوام، قابلیت تعمیرپذیری، نوآوری

۳) زیبایی و شهرت، طراحی، پایایی، دوام

۴) قابلیت تعمیرپذیری و نگهداری، بازرسی، نوآوری، عملکرد

۲ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) عوامل غیرقابل کنترل به دو دسته‌ی عوامل محیطی و عوامل داخلی تقسیم می‌شوند.

۲) متغیر پاسخ y که تحت تاثیر عوامل قابل کنترل است متغیری تصادفی با توزیع نرمال می‌باشد.

۳) تاگوچی پراکندگی و تغمیرپذیری را نماد عدم کیفیت می‌داند.

۴) گاروین بیان می‌کند که کیفیت دارای جنبه‌های ۸ گانه می‌باشد.

۳ـ محور بررسی و تحلیل در شش سیگما .... می‌باشد؟

۱) فرآیند ۲) تغییرات ۳) اغتشاش ۴) هر سه مورد

۴ـ مراحل چرخه‌های DMAIC کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

۱) تعریف، تحلیل، بهبود، اندازه‌گیری
۲) تعریف، اندازه‌گیری، تحلیل، بهبود، کنترل
۳) تعریف، کنترل، تحلیل، بهبود، اندازه‌گیری
۴) تعریف، بهبود، تحلیل، اندازه‌گیری، کنترل

۵ـ چرخه‌ی DMAIC از کدام‌یک از چرخه‌های زیر الهام گرفته است.

۱) چرخه بهبود شوهارت ۲) دمینگ ۳) تاگوچی ۴) ۱ و ۲

۶ـ بر اساس به‌کارگیری از روش 6σ کدام‌یک از موارد زیر انتظار می‌رود؟

۱) نرخ معیوب‌ها و هزینه‌های تولید و بازرسی کاهش یابد.

۲) نرخ معیوب‌ها کاهش یابد و هزینه‌های کنترل کیفیت افزایش می‌یابد.

۳) هزینه‌های تولید کاهش می‌یابد و در نتیجه کارایی و سوددهی بالا می‌رود.

۴) هزینه‌های تولید و فروش کاهش می‌یابد و در نهایت رضایت مشتری تامین می‌گردد.

۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر از جمله مواردی است که دمینگ برای روش‌های آماری در بهبود کیفیت انجام داده است؟

۱) معرفی نمودار کنترل و کاربردهای آن در تولید

۲) برگزاری همایش یک هفته‌ای با هدف بالا بردن کیفیت خدمات ارتباط ژاپن

۳) تدریس روش‌های کنترل کیفیت در ژاپن و تاسیس جایزه توسط اتحادیه مهندسان و دانشمندان

۴) انتشار کتاب راهنمای کنترل کیفیت

۸ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر از جمله مواردی است که تاگوچی برای روش‌های آماری در بهبود کیفیت انجام داده است؟

۱) انتشار کتاب راهنمای کنترل کیفیت

۲) معرفی نمودار کنترل و کاربردهای آن در تولید

۳) معرفی نتایج تحقیقات گسترده در زمینه کاربرد طراحی آزمایش‌ها در کنترل کیفیت در سطح دانشگاه‌ها

۴) توسعه کاربردهای طرح آزمایش‌ها در کنترل کیفیت پس از دیدار ژاپن

۹ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر جزء ابزار هفت‌گانه کنترل فرایند نمی‌باشد؟

۱) برگه کنترل ۲) نمودار شانه‌ای ۳) نمودار پارتو ۴) نمودار پراکندگی

۱۰ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) نمونه‌گیری برای پذیرش برای بالا بردن کیفیت است.

۲) از جمله روش‌های آماری مفید برای کنترل کیفیت روش‌های قبل از تولید و روش‌های حین تولید می‌باشد.

۳) زیبایی از جمله ابعاد هشت‌گانه کیفیت است.

۴) برگه کنترل از جمله ابزار هفت‌گانه SPC می‌باشد.

۱۱ ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر برای داده‌های کیفی مناسب می‌باشد؟

۱) شانه‌ای ۲) پارتو ۳) زنگوله‌ای ۴) دونمایی

۱۲ ـ کاربردهای تحلیل توسط نمودار پارتو کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

۱) بهبود کارایی ۲) هدایت اصلاح عیوب از طریق مقایسه

۳) نگهداری و تعمیرات ۴) هر ۳ مورد

۱۳ ـ طبق نظر دانشمند معروف ایتالیایی توزیع ثروت در علم اقتصاد به صورت کدام‌یک از درصدهای زیر می‌باشد.

۱) $10\%-10\%-80\%$ ۲) $20\%-80\%$

۳) $30\%-70\%$ ۴) $10\%-20\%-70\%$

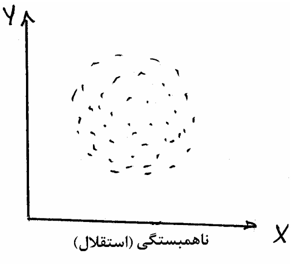
۱۴ ـ در صورتی که فراوانی از یک دسته به دسته دیگر به‌صورت یک در میان تناوب دارد و دارای روند ویژه کدام‌یک از هیستوگرام‌های زیر استفاده می‌شود.

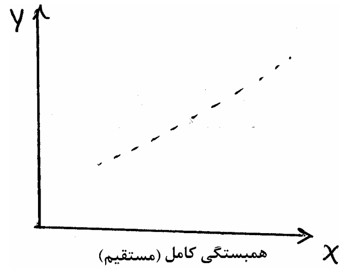
۱) نرمال ۲) شانه‌ای ۳) دونمایی ۴) چولگی مثبت

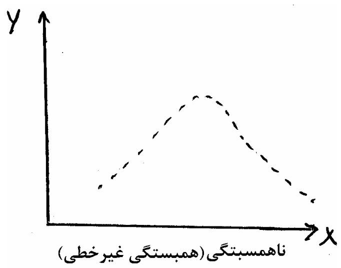
۱۵ ـ در کدام‌یک از نمودارهای زیر نوع رابطه بین ۲ متغیر را نشان می‌دهد.

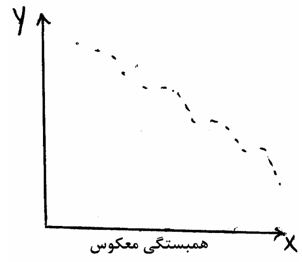
۱) نمودار پراکنش ۲) نمودار کنترل ۳) نمودار پارتو ۴) نمودار دونمایی

۱۶ ـ کدام‌یک از شکل‌های زیر همبستگی کامل را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۷ ـ منظور از کیفیت عبارت است از:

۱) کیفیت در طراحی
۲) کیفیت در تولید
۳) کیفیت در مصرف
۴) علاوه بر موارد فوق، کیفیت در خدمات

۱۸ ـ هر چه تولرانس‌ها .... انتخاب گردند، دقت در تولید، .... بوده و کیفیت محصول بهبود می‌یابد.

۱) محدودتر ـ زیاد
۲) بزرگتر ـ زیاد
۳) محدودتر ـ کم
۴) بزرگتر ـ کم

۱۹ ـ اندازه‌گیری و ارزیابی داده‌ها و ستاده‌های یک فرآیند، به عهده‌ی چه بخشی از سازمان می‌باشد؟

۱) بازاریابی و فروش
۲) فنی و مهندسی
۳) کنترل کیفیت
۴) تولید

۲۰ ـ سیستم کنترل کیفیت ....

۱) با بخش بازاریابی ارتباط دارد.
۲) تحت تاثیر خط‌مشی‌های تولید قرار می‌گیرد.
۳) در ارتباط با استراتژی شرکت می‌باشد.
۴) همه‌ی موارد فوق، صحیح می‌باشند.

۲۱ ـ مساله‌ی اساسی در کنترل کیفیت چیست؟

۱) هزینه‌های ناشی از کنترل کیفیت
۲) منافع حاصل از کنترل کیفیت
۳) انتخاب نمونه‌هایی که نشان‌دهنده‌ی ارزیابی خروج فرآیند باشند.
۴) تولید حداکثر برای رسیدن به بهره‌وری بالا

۲۲ ـ "اندازه‌گیری جزئیات یک مشخصه‌ی عمده محصول توسط وسایل اندازه‌گیری" به کدام‌یک از موارد زیر تعلق دارد؟

۱) کنترل کیفیت به‌وسیله‌ی وصفی‌ها
۲) کنترل کیفیت به‌وسیله‌ی متغیرها
۳) کنترل کیفیت به‌وسیله‌ی متغیرها و وصفی‌ها
۴) نمونه‌برداری آماری

۲۳ـ در کنترل کیفیت به‌وسیله‌ی وصفی‌ها ....

۱) وجود یا عدم صفت خاصی در یک محصول بررسی می‌شود.

۲) اطلاعات بیشتری نسبت به کنترل متغیرها جمع‌آوری می‌شود.

۳) هزینه‌های کنترل نسبت به کنترل متغیرها کمتر است.

۴) موارد ۱ و ۲ صحیح می‌باشند.

۲۴ـ نمودارهای کنترل کیفیت ابزاری است برای شناسایی .... کیفیت هستند.

۱) تغییرات بی‌دلیل
۲) تغییرات غیرقابل کنترل
۳) علل تصادفی متغیر
۴) علل غیرتصادفی تغییر

۲۵ـ تمرکز هر چه بیشتر توزیع مشخصه‌ی کیفیت با پراکندگی آن روی مقدار هدف به زبان آماری چه نام دارد؟

۱) ناریبی ۲) افزایش کارایی ۳) کاهش واریانس ۴) در کنترل بودن

۲۶ـ مدیر یک شرکت خدمات پس از فروش یک خودرو می‌خواهد بداند که بیشترین علت خرابی موتورهای تعمیری کدام است چه نموداری را به او پیشنهاد می‌دهند؟

۱) علت و معلول ۲) پارتو ۳) استخوان ماهی ۴) توزیع فراوانی

۲۷ـ عواملی که جهت بیان مقدار پاسخ موردنظر در یک فرایند توسط به‌کارگیری تنظیم می‌شوند چه می‌گویند؟

۱) عوامل ورودی ۲) عوامل قابل کنترل ۳) عوامل اغتشاش برونی ۴) عوامل استهلاک

۲۸ـ هر چه متمرکز کردن توزیع مشخصه‌ی کیفیت عبارت است از..........

۱) از بین بردن اریبی ۲) افزایش کارایی ۳) قابلیت اطمینان ۴) سازگاری

۲۹ـ وقتی داده‌های به‌دست آمده به علت خطای اندازه‌گیری بالا انعکاس واقعیت‌های موجود نباشد با الگوی بافت نگار .... روبرو هستیم.

۱) شانه‌ای ۲) فلات ۳) چوله ۴) نرمال

۳۰ـ مطابق نظر کدام‌یک از دانشمندان علم کیفیت «کیفیت ضرری است که یک محصول از زمانی که برای مشتری ارسال می‌شود برای جامعه به بار می‌آورد»

۱) جوران ۲) گاروین ۳) تاگوچی ۴) دمینگ

۳۱ـ ساده‌ترین راه برای تعیین رابطه‌ی علت و معلول بین دو متغیر:

۱) رسم نمودار علت و معلول
۲) رسم نمودار پراکنش
۳) رسم نمودار پارتو
۴) رسم نمودار همبستگی

۳۲ـ مطبع‌ترین شکل توزیع داده‌ها:

۱) بافت نگار فلات ۲) نرمال ۳) بافت نگار دونمایی ۴) بافت نگار شانه‌ای

پاسخنامه

۱ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۲ ـ گزینه (۲) صحیح است.

متغیر پاسخ y در برخی مسائل دارای توزیع نرمال $N(\mu,\sigma)$ می‌باشد.

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است.

فرآیند محور بررسی و تحلیل در 6σ است.

۴ ـ گزینه (۲) صحیح است.

ترتیب مراحل چرخه‌های بهبود را به درستی نشان می‌دهد.

۵ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۶ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۷ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۸ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۹ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۱۰ ـ گزینه (۱) صحیح است.

نمونه‌گیری برای پذیرش برای رد یا قبول محموله می‌باشد و برای بالا بردن کیفیت نیست.

۱۱ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۱۲ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۱۳ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۱۴ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۱۵ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۱۶ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۱۷ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۱۸ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۱۹ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۲۰ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۲۱ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۲۲ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۲۳ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۲۴ ـ گزینه (۴) صحیح است.

۲۵ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۲۶ ـ گزینه (۲) صحیح است.

چون گفته شده است بیشترین علت خرابی

۲۷ ـ گزینه (۲) صحیح است.

۲۸ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۲۹ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۳۰ ـ گزینه (۳) صحیح است.

۳۱ ـ گزینه (۱) صحیح است.

۳۲ ـ گزینه (۱) صحیح است.

فصل دوم

نمودارهای کنترل برای متغیرهای پیوسته (متغیر)

به یک ویژگی قابل اندازه‌گیری مثل طول ـ وزن ـ قطر که پس از اندازه‌گیری با یک عدد نشان داده می‌شود متغیر کمی گفته می‌شود.
برای هر متغیر کمی که باید کیفیت آن کنترل شود دو پارامتر میانگین و تغییرات (پراکندگی) مورد بررسی قرار می‌گیرد.
نمودارهای کنترل آماری فرآیند SPC (Statistical Process Control)برای تشخیص این‌که انتقال در مکان (میانگین) و یا پراکندگی (واریانس) توزیع متغیر کمی، بیش از آن چیزی است که به تصادف نسبت داده می‌شود یا نه، عمل می‌کنند. در واقع این نمودارها در کشف انحرافات با دلیل به ما کمک می‌کنند.

حدود کنترل ـ حدود تلرانس طبیعی ـ حدود مشخصه فنی

دو خط بالا و پایین نمودار به ما کمک می‌کنند تشخیص دهیم تغییرپذیری انتقال پارامترها از کدام جهت صورت گرفته است.

LCL(Lower Control Limit)
UCL (Upper Control Limit)

خط وسط یا (Centrol Line) CL میانگین نقاط رسم شده در نمودار است که در صورت معلوم بودن توزیع جامعه مقدار واقعی پارامتر است.

دو حد دیگر برای مشخصه فنی یا پارامترهای توزیع وجود دارد که عبارتند از:

LSL (Lower Specification Limit)
USL (Upper Specification Limit)

این حدود که حدود رواداری نامیده می‌شوند توسط طراح از طریق پرداختن به نیازهای مشتری در رابطه با مشخصه کیفی ارائه می‌گردد و با حدود کنترل متفاوت هستند و LSL و USL حدود X هستند در حالی که LCL و UCL حدود $\bar{X}$ می‌باشند.
ضمناً حدود تلرانس طبیعی عبارتند از:

UNTL (Upper Natural Tolerance Limit)
LNTL (Lower Natural Tolerance Limit)

این حدود معمولاً به صورت $\mu \pm 3\sigma$ تعریف می‌شوند. و حدود هشدار عبارتند از:

UWL (Upper Warning Limit)
LWL (Lower Warning Limit)

این حدود معمولاً به صورت $\mu \pm 2\sigma$ تعریف می‌شوند.

نمودارهای مفید برای میانگین و پراکندگی عبارتند از $R,S,\bar{X}$ که $\bar{X}$ میانگین و S انحراف معیار و R دامنه تغییرات مشاهدات است، هر چند نمودار S انحراف معیار داده‌ها و تغییرات فرایند را کنترل می‌کند اما استفاده از نمودار R معمولاً بیشتر رخ می‌دهد. لازم به ذکر است در هر فرایند میانگین و تغییرات همزمان مورد کنترل واقع شوند.

نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های کیفی پیوسته دارای اهداف زیر است.

الف) کنترل پارامتر مرکزی (میانگین) ب) کنترل تغییرات از دیدگاه پراکندگی

انواع نمودارهای کنترل

- بخشI: زیرگروه‌های چندعضوی $n_i > 1$، $(\bar{X},R,S)$
- بخشII: زیرگروه‌های تک عضوی $n_i = 1$، $(\bar{X},R_M,EWMA,EWMD,CUSUM)$

بخش I:

۱ـ نمودار $\bar{X},R$

می‌دانیم اگر $X_1,\cdots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ وقتی μ,σ^2 معلوم است با احتمال $100(1-\alpha)\%$ میانگین نمونه $(\bar{X})$ از میانگین جامعه (μ) حداکثر باندازه $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ اختلاف دارد یعنی با احتمال $(1-\alpha)100\%$ ، $\bar{X}\in\left(\mu\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

حال با فرض معلوم بودن μ,σ^2 حدود کنترل پیدا می‌شود که اگر $Z_{\frac{\alpha}{2}}=3$ پس 99.73% از میانگین‌ها باید در $\bar{X}\in\left(\mu\pm\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ صدق کنند.

به عبارت دیگر $LCL=\mu-A\sigma, UCL=\mu+A\sigma, CL=\mu$ که $A=\frac{3}{\sqrt{n}}$ و از جدول انتهای فصل به‌دست می‌آید.

لازم به ذکر است اگر جامعه اصلی که از آن نمونه گرفته‌ایم نرمال باشد بنا به قضیه حد مرکزی استفاده از روابط بالا برای جوامع دیگر اشکال ندارد به شرط آن‌که تعداد نمونه‌ها بزرگ باشد.

اگر μ,σ^2 معلوم نباشند بایستی آن‌ها را برآورد کرد. فرض بر این است m بار نمونه‌گیری کرده‌ایم و هر بار تعداد n نمونه انتخاب کرده‌ایم و $\bar{X}_1,\cdots,\bar{X}_m$ میانگین نمونه‌های n تایی هستند حال $\bar{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}}{mn}$ میانگین کل نمونه‌ها برآورد مناسبی از μ است. $\bar{\bar{X}}$ به‌عنوان خط مرکزی (CL) در نمودار کنترل مورد استفاده واقع می‌شود. برای برآورد σ از روش زیر استفاده می‌شود.

اگر $R=X_{max}-X_{min}$ دامنه تغییرات نمونه n تایی باشد و $W=\frac{R}{\sigma}$ را **دامنه نسبی** بنامیم با توجه به آن‌که $E(W)=E\left(\frac{R}{\sigma}\right)=d_2$ ، $Var(W)=d_3^2$ مقادیری ثابت بر حسب n هستند، می‌توان از $\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}$ به‌عنوان برآورد σ استفاده نمود.

که در آن وقتی m بار نمونه‌گیری می‌شود اگر R_i دامنه تغییرات نمونه n تایی i ام باشد آن‌گاه $\bar{R}=\frac{\sum_{i=1}^{m}R_i}{m}$ میانگین دامنه‌های تغییرات است. میزان دقت $\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}$ برای برآورد σ با افزایش n کم می‌شود و معمولاً برای 6 یا 5 یا n=4 این روش قابل قبول است.

حال به‌جای $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بایستی برآورد زیر را به‌کار ببریم.

$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

معمولاً از ضریب‌های ثابت $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ که فقط به n بستگی دارد استفاده می‌شود و حدود کنترل برآورد شده عبارت‌اند از

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2\bar{R}$$

یعنی $CL = \bar{\bar{X}}$ و $UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$ و $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$ نمودار کنترل فوق برای پارامتر مرکزی میانگین تهیه شده است.

ضرایب d_2, A_2 را می‌توانید از جدول انتهای فصل ملاحظه فرمایید.

تذکر: در مورد تعداد زیرگروه‌ها (m) و تعداد نمونه هر زیر گروه (n) بایستی توجه نمود تعداد نمونه هر زیر گروه با کارایی نسبی برآورد σ از طریق R یعنی $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ نسبت عکس دارد. یعنی هر چه تعداد نمونه بیشتر کارایی کمتر می‌گردد با این وجود نمی‌توان کمترین تعداد نمونه را پیشنهاد کرد و می‌گویند برای 6 یا 5 یا n=4 این کارایی مناسب است ضمناً تعداد زیر گروه‌ها را نمی‌توان کمتر از 20 در نظر گرفت پس:

$$m \geq 20 \quad , \quad 4 \leq n \leq 6$$

حال می‌توان نمودار R را برای پارامتر پراکندگی به شرح زیر به‌کار برد.

همان‌طور که دیدیم

$$E(W) = d_2$$

$$Var(W) = \frac{Var(R)}{\sigma^2} = d_3^2$$

حال $\hat{\sigma}_R = \sigma d_3 = \frac{\bar{R}}{d_2}d_3$ می‌تواند به‌عنوان برآورد انحراف معیار دامنه تغییرات به‌کار رود.

پس اگر $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$ خط مرکزی باشد حد بالای کنترل نمودار R به صورت

$$\bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_4$$

و حد پایین کنترل نمودار R به صورت

$$\bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_3$$

مثال ۱: اطلاعات زیر میانگین و دامنه تغییرات 20 نمونه 5 تایی از میزان شکر موجود در بسته‌های شکر در کارخانه بر حسب کیلوگرم می‌باشد الف با توجه به اطلاعات زیر حدود کنترلی $\bar{X}$ و R برای تولیدات آتی به‌دست آورید؟

ب) این نمونه هر 15 دقیقه به‌کار گرفته شده‌اند و تولید در ساعت کارخانه 350 بسته می‌باشد و حدود مطلوب نیز 0.820 تا 0.840 kg می‌باشد.

با توجه به این‌که فرض شود وزن بسته‌ها دارای توزیع نرمال است. چند درصد از آن‌ها نامطلوب شناخته می‌شوند؟ آیا با تغییر میانگین فرآیند می‌توان درصد نامطلوب را صفر کرد؟

ج) برآورد قابلیت فرایند و نسبت‌های قابلیت فرایند یک طرفه را محاسبه کنید؟

حل مثال ۱

	$\bar{X}$	R
۱	0.8372	0.01
۲	0.8324	0.009
۳	0.8318	0.008
۴	0.8344	0.004
۵	0.8349	0.005
۶	0.8332	0.011
۷	0.8340	0.009
۸	0.8344	0.003
۹	0.8308	0.002
۱۰	0.8350	0.006
۱۱	0.8380	0.006
۱۲	0.8322	0.002
۱۳	0.8356	0.013
۱۴	0.8322	0.015
۱۵	0.8304	0.008
۱۶	0.8372	0.011
۱۷	0.8382	0.006
۱۸	0.8346	0.006
۱۹	0.8360	0.004
۲۰	0.8374	0.006

$$\sum \bar{X} = 16.6796$$
$$\bar{\bar{X}} = \frac{16.6796}{20} = 0.83398$$
$$\sum R = 0.134 \qquad \bar{R} = \frac{0.134}{20} = 0.0067$$
$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 0.83398 + (0.58 \times 0.006) = 0.8379$$
$$LCL\bar{X} = \bar{X} - A_2\bar{R} = 0.83398 - (0.58 \times ??) = 0.8301$$
$$UCL_R = D_4\bar{R} = 2.11 \times 0.0067 = 0.01414$$
$$LCL_R = D_3\bar{R} = 0 \times 0.0067 = 0$$

ب)

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = 0.00288$$
$$P(0.82 < X < 0.84) = 0.9812$$

1.8% نامطلوب

ج)

$$\hat{C}_p = \frac{0.84 - 0.82}{6(\hat{\sigma})} = 1.157$$

D_4, D_3 مقادیر ثابتی هستند که فقط به n بستگی دارند. و در جدول انتهای فصل آمده‌اند.

تذکر: با توجه به حدود کنترل نمودار R برای n<7، حد پایین کنترل R عددی منفی می‌شود در حالی که R باید مثبت باشد. برای حل این مساله ضریب D_3 برای $n \le 6$ را برابر صفر قرار می‌دهند. بنابراین فقط در این حالتها نمودار کنترل R به صورت متقارن نیست. لازم به ذکر است در هر حال وجود نقطه پایین‌تر از حد پایین کنترل نمودار R نشان از وضعیت عالی است.

حال که حدود کنترل پیدا شدند برای رسم نمودار این حدود کنترل را که حدود آزمایشی نیز گفته می‌شود رسم می‌کنند سپس m مقدار میانگین نمونه‌ها ($\bar{X}$ها) را و همچنین m مقدار دامنه تغییرات نمونه‌ها (R ها) را به‌عنوان نقطه روی نمودارهای $\bar{X}$ و R قرار می‌دهند و هر نقطه که خارج از حدود آزمایشی باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد و در صورت پیدا شدن تغییر تصادفی این نقطه حذف و حدود کنترل مجددا حساب می‌شوند. اگر در حدود جدید نقطه‌ای خارج از کنترل باشد نشان آن است که این انحرافات موجود بوده اما با حدود قبلی مغفول مانده است این روند یافتن نقاط خارج از کنترل و عوامل تغییر با دلیل آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا همه نقاط در حدود کنترل باشند. در هر حال نباید بیشتر از 25% نقاط حذف شوند. در این صورت ضمن اقدام درخصوص عوامل تغییر با دلیل داده‌های جدید باید نمونه‌گیری شود.

تذکر:

۱ـ بهتر است اول نمودار R و سپس نمودار $\bar{X}$ رسم شود چون حدود کنترل نمودار $\bar{X}$ به پراکندگی و تغییرپذیری فرایند وابسته است.

۲ـ اگر نقطه یا نقاطی حذف شوند می‌توان برای ساده شدن محاسبات از فرمول‌های زیر استفاده نمود.

$$\text{جدید}\ \bar{\bar{X}}_n = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i - \sum \bar{X}_d}{m - m_d}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i$ مجموع میانگین‌های قبلی و $\sum \bar{X}_d$ مجموع میانگین‌های زیرگروه‌های حذف شده و m تعداد زیرگروه‌ها و m_d تعداد زیرگروه‌های حذف شده است.

$$\text{جدید}\ \bar{R}_n = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i - \sum R_d}{m - m_d}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{m} R_i$ مجموع دامنه تغییرات زیرگروه‌ها و $\sum R_d$ مجموع دامنه تغییرات زیرگروه‌های حذف شده و m تعداد زیرگروه‌ها و m_d تعداد زیرگروه‌های حذف شده است. ضمناً اندیس n برای $\bar{R}_n, \bar{\bar{X}}_n$ نشان دهنده برابر n بودن تعداد نمونه زیرگروه‌ها می‌باشد.

حال اگر قرار دهید

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}_0 \quad , \quad \bar{R}_n = R_0 \quad , \quad \frac{R_0}{d_2} = \sigma_0$$

حدود کنترل اصلاح شده در دو حالت معلوم و مجهول بودن σ^2, μ به ترتیب عبارتند از:

$$CL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 \quad , \quad UCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 + A\sigma_0 \quad , \quad LCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 - A\sigma_0$$

و یا $\bar{X}_n \pm A\sigma_0$ و

$$CL_R = \bar{R}_n = R_0 \quad , \quad UCL_R = D_2\sigma_0 \quad , \quad LCL_R = D_1\sigma_0$$

که $\sigma_0 = \frac{\bar{R}_n}{d_2}$ و $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

ضرایب A, D_2, D_1 را می‌توانید از جدول آخر فصل ملاحظه فرمایید.

مثال ۲: اطلاعات زیر نتایج حاصل از نمونه‌های 5 تایی که از یک فرآیند ساخت مولدهای برق تهیه شده‌اند را نشان می‌دهند. مشخصه کیفی موردنظر ولتاژ خروجی است:

$\bar{X}_i$	103	102	104	105	104	106	102	105	106	104
R_i	4	5	2	11	4	3	7	2	4	3

خط مرکزی و حدود کنترلی مناسبی را برای کنترل تولیدات آتی محاسبه کنید؟

حل:

$$\sum \bar{X}_i = 1041$$

$$\sum R_i = 45$$

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 104.1 + 0.577 \times 4.5 = 106.69$$

$$CL\bar{X} = \bar{\bar{X}} = 104.1$$

$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 104.1 - 0.577 \times 4.5 = 101.5$$

$$LCL_R = \bar{R}D_3 = 0$$

$$CL_R = \bar{R} = 4.5$$

$$UCL_R = \bar{R}D_4 = 4.5 \times 2.114 = 9.51$$

$\bar{X}_i$ها همگی داخل حدود کنترل و داده 4ام از حدود کنترل R خارج است.

$$\bar{R}_n = \frac{\sum R_i - R_d}{g - g_d} = \frac{45-11}{10-1} = 3.78$$

$$LCL_R = 0$$

$$CL_R = 3.78$$

$$UCL_R = 7.99$$

مثال۳: فرض کنید اعداد زیر مربوط به 25 نمونه 4 تایی از قطر قطعات تولیدی در یک فرآیند است که تفاضل اندازه‌ها از 6mm نوشته شده است (مثلاً به‌جای 6.35mm نوشته‌اند 35) نمودارهای $\bar{X}$ و R را رسم نمایید.

	اندازه‌ها				$\bar{X}$	R
شماره نمونه	A	B	C	D		
۱	35	40	32	33	6.35	0.08
۲	46	37	36	41	6.40	0.10
۳	34	40	34	36	6.36	0.06
۴	69	64	68	59	6.65	0.10
۵	38	34	44	40	6.39	0.10
۶	42	41	43	34	6.40	0.09
۷	44	41	41	46	6.43	0.05
۸	33	41	38	36	6.37	0.08
۹	48	52	49	51	6.50	0.04
۱۰	47	43	36	42	6.42	0.11
۱۱	38	41	39	38	6.39	0.03
۱۲	37	37	41	37	6.38	0.04
۱۳	40	38	47	35	6.40	0.12
۱۴	38	39	45	42	6.41	0.07
۱۵	50	42	43	45	6.45	0.08
۱۶	33	35	29	39	6.34	0.10
۱۷	41	40	29	34	6.36	0.12
۱۸	38	44	28	58	6.42	0.30
۱۹	33	32	37	38	6.35	0.06
۲۰	56	55	45	48	6.51	0.11
۲۱	38	40	45	37	6.40	0.08
۲۲	39	42	35	40	6.39	0.07
۲۳	42	39	39	36	6.39	0.06
۲۴	43	36	35	38	6.38	0.08
۲۵	39	38	43	44	6.41	0.06
جمع						

حل : با توجه به آن‌که $m = 25$ و $n = 4$ داریم:

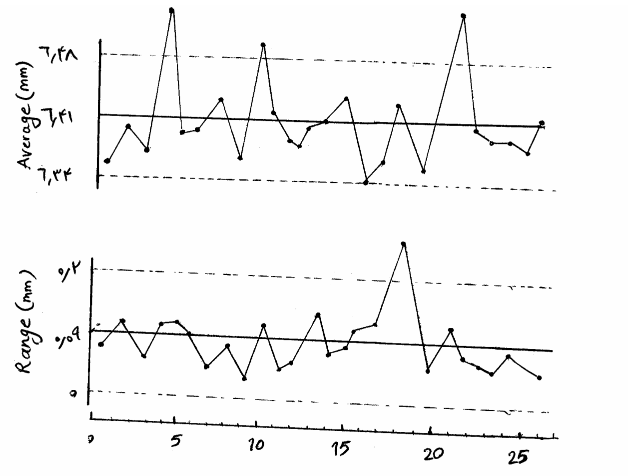
$$\bar{\bar{X}} = \frac{160.25}{25} = 6.41 \quad , \quad UCL_{\bar{X}} = 6.41 + 0.07 = 6.48$$

$$\bar{R} = \frac{2.19}{25} = 0.09\text{mm} \quad , \quad LCL_{\bar{X}} = 6.41 - 0.07 = 6.34$$

$$A_2\bar{R} = 0.729(0.09) = 0.07 \quad , \quad UCL_R = 0.20$$

$$D_4\bar{R} = 2.282(0.09) = 0.20 \quad , \quad LCL_R = 0$$

نمودارهای مربوط به $\bar{X}$ و R به صورت زیر رسم می‌شوند.



برای یافتن حدود اصلاح شده داریم:

$$\bar{R}_{new} = \frac{2.19 - 0.3}{25 - 1} = 0.079\text{mm}$$

$$\bar{X}_{new} = \frac{160.25 - (6.65 + 6.51 - 6.50)}{25 - 3} = 6.39$$

۲ـ نمودارهای کنترل $S, \bar{X}$

همان‌طور که دیدید یک روش برآورد σ استفاده از R می‌باشد روش دیگر برآورد σ استفاده مستقیم از S_i است که انحراف معیار نمونه‌هاست. می‌دانیم $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ برآورد ناااریب σ^2 است یعنی $E(S^2) = \sigma^2$ اما با فرض آن‌که توزیع جامعه نرمال است قرار دهید $S_i^2 = \frac{\sum (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$ و $\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_i^2}{m}$ آن‌گاه می‌توان نشان داد

$$E(\bar{S}) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sigma = C_4\sigma$$

$$\sigma_S = \sqrt{Var(S)} = \sigma\sqrt{1 - C_4^2}$$

و لذا حدود کنترل نمودار S عبارتند از:

$$UCL_S = \overline{S} + \frac{3\overline{S}}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_4\overline{S}$$

$$LCL_S = \overline{S} - \frac{3\overline{S}}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_3\overline{S}$$

و خط مرکزی $\overline{S}$ است.

و حدود کنترل $\overline{X}$ با استفاده از برآورد $\overline{S}$ عبارت است از:

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} \quad , \quad LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S}$$

و خط مرکزی $\overline{\overline{X}}$ است.

لازم به ذکر است در واقع $A_3 = \frac{3}{C_4\sqrt{n}}$

ضرایب A_3, B_3, B_4 از جدول انتهای فصل قابل به‌دست آوردن است.

برآورد قابلیت فرآیند Process Capability

نسبت قابلیت فرایند به صورت زیر تعریف می‌شود.

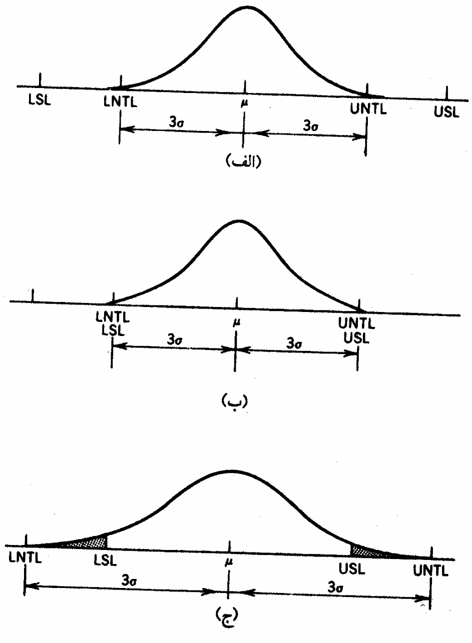
$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

که در آن USL و LSL حدود مشخصه فنی هستند و 6σ فاصله حدود تلرانس طبیعی یعنی UNTL - LNTL می‌باشد. PCR را با C_p نیز نشان می‌دهند. PCR مخفف Process Capability Ratio است.

σ که انحراف معیار جامعه و معمولاً مجهول است می‌تواند توسط $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$ یا $\hat{\sigma} = \overline{S}$ برآورد شود لذا برآورد نسبت قابلیت فرایند که آن را با $\widehat{PCR}$ یا $\hat{C}_p$ نشان می‌دهند عبارت است از:

$$\hat{C}_p = \widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{\hat{\sigma}}$$

در شکل زیر سه حالت برای $\hat{C}_p$ در نظر گرفته شده است که فرض بر این است که میانگین وسط حدود مشخصات فنی قرار دارد.



شکل (الف) بیانگر آن است که $\hat{C}_p > 1$ یعنی حدود تلرانس طبیعی داخل حدود مشخصه فنی هستند. در این حالت فرآیند وضعیت مناسبی دارد و تقریباً معیوب تولید نمی‌شود زیرا فرآیند از فاصله کل مجاز استفاده ننموده و فقط بخشی از آن را به کار گرفته است.
شکل (ب) بیانگر آن است که $\hat{C}_p = 1$ یعنی فرآیند از تمام فاصله مجاز استفاده کرده و حدود تلرانس طبیعی، حدود مشخصه فنی را پوشش داده است با فرض برقراری توزیع نرمال و با توجه به آن‌که

$$P\left(|X-\mu|<3\sigma\right)=0.9973$$

می‌توان گفت در این حالت 0.27% از اقلام معیوب تولید می‌شوندبه عبارت دیگر در هر میلیون قطعه 2700 مورد معیوب می‌باشد که شرایط خوبی نیست و باید چاره‌اندیشی شود.
شکل (ج) بیانگر آن است که $\hat{C}_p < 1$ یعنی فرآیند بیش از فاصله مجاز استفاده نموده و نشانگر تولید معیوب خارج از قاعده است.

تذکر: اگر قرار دهید $P=\left(\frac{1}{\hat{C}_p}\right)100$ آن‌گاه P درصدی از فاصله بین حدود مشخصات فنی را نشان می‌دهد که به وسیله فرایند از آن استفاده گردیده است.

نسبت‌های قابلیت یک‌طرفه

وقتی از یکی از حدود مشخصه فنی استفاده شود PCR را می‌توان به صورت یک طرفه طبق تعاریف زیر پیدا کرد.

$$PCR_U=\frac{USL-\mu}{3\sigma}\quad,\quad PCR_L=\frac{\mu-LSL}{3\sigma}$$

که وقتی به‌جای σ,μ برآوردهای $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ بگذاریم برآوردهای نسبت قابلیت یک طرفه به‌دست می‌آیند.
در صورت نامتقارن بودن فرایند و حدود مشخصه فنی نسبت به میانگین فرآیند بهتر است از $PCR_k=\min\{PCR_U,PCR_L\}$ استفاده شود.

نکته۱: از دیدگاه تجربی $\hat{C}_p=1.33$ که در آن $USL-LSL=1.33(6\sigma)=8\sigma$ نشان‌دهنده یک وضعیت مناسب و قابل قبول می‌باشد.

نکته ۲: روش دوم محاسبه قابلیت فرآیند، با فرض $X\sim N\left(\mu=\bar{\bar{X}},\sigma=\frac{R}{d_2}\right)$ احتمال $C_p=P(X<LSL)+P(X>USL)$ را حساب کرده می‌توان آن را میزان تولید محصول معیوب با فرض تحت کنترل بودن فرایند دانست. دقت شود این عدد برای حدود 3σ تقریباً 27% درصد و برای حدود 6σ تقریباً 0.0000002 درصد می‌باشد سپس با یافتن C_p می‌توان وضع فرآیند را با حالت‌های استاندارد مثل 6σ مقایسه نمود.

مثال۴: اطلاعات زیر نتایج حاصل از نمونه‌های 5 تایی در تولید شفت در یک کارخانه اتومبیل‌سازی می‌باشد، خط مرکزی و حدود کنترلی مناسب اصلاح شده را برای کنترل قطر شفت‌های تولیدات آتی به‌دست آورید.

	$\bar{X}$	R
۱	6.35	0.08
۲	6.40	0.1
۳	6.39	0.6
۴	6.65	0.1
۵	6.39	0.1
۶	6.40	0.09
۷	6.43	0.05
۸	6.37	0.08
۹	6.50	0.04
۱۰	6.42	0.11
۱۱	6.39	0.03
۱۲	6.38	0.04
۱۳	6.40	0.12
۱۴	6.41	0.07
۱۵	6.35	0.08
۱۶	6.34	0.1
۱۷	6.39	0.12
۱۸	6.42	0.3
۱۹	6.35	0.06
۲۰	6.51	0.11
۲۱	6.40	0.08
۲۲	6.39	0.07
۲۳	6.39	0.06
۲۴	6.38	0.08
۲۵	6.41	0.06

حل :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{160.25}{25} = 6.41\,\text{mm}$$

$$\bar{R} = \frac{2.19}{25} = 0.09\,\text{mm}$$

$$A_2\bar{R} = 0.729(0.09) = 0.07$$

$$UCL_{\bar{X}} = 6.41 + 0.07 = 6.48$$

$$LCL_{\bar{X}} = 6.41 - 0.07 = 6.34$$

$$D_4\bar{R} = 2.282(0.09) = 0.2$$

$$UCL_R = 0.2$$

$$LCL_R = 0$$

$$\bar{X}_0 = \bar{\bar{X}}_{new} = \frac{160.25 - (6.65 + 6.51)}{25 - 2}$$

$$R_0 = \bar{R}_{new} = \frac{2.19-0.3}{25-1} = 0.079\text{mm}$$

$$\sigma_0 = \frac{R_0}{d_2} = 0.038 \quad , \quad \bar{X}_0 = 6.40$$

$$UCL\bar{X} = \bar{X}_0 + A\sigma_0 = 6.40 + (1.5)(0.038) = 6.46\text{mm}$$

$$LCL\bar{X} = \bar{X}_0 - A\sigma_0 = 6.40 - (1.5)(0.038) = 6.34\text{mm}$$

$$UCL_R = D_2\sigma_0 = (4.698)(0.038) = 0.18\text{mm}$$

$$LCL_R = D_1\sigma_0 = (0)(0.038) = 0\text{mm}$$

$$\bar{\bar{X}}_0 = \frac{16.6796-(0.8380+0.8282)}{20-2} = 0.834077$$

$$UCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 + A_2\bar{R} = 0.834077 + 0.003886 = 0.8380$$

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 - A_2\bar{R}0.834077 - 0.003886 = 0.8302$$

$$UCL_R = D_4R = 0.1414$$

$$LCL_R = D_3R = 0$$

$$U = 0.840$$

$$L = 0.820$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.0067}{2.326} = 0.0029$$

$$6\sigma' = 6 \times 0.0029 = 0.0174$$

$$U - L = 0.020$$

با توجه به این‌که $U-L > 6\sigma'$ پس درصد معیوب‌ها می تواند به صفر برسد.

در صورتی که میانگین برابر $0.830 = \frac{0.840+0.820}{2}$ گردد درصد معیوب صفر می‌شود.

۳)

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = 0.0029 \qquad \hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\times\hat{\sigma}} = \frac{0.02}{6\times 0.0067}$$

$$PCR_U = \frac{0.840-0.834077}{3\times 0.0067}$$

$$PCR_L = \frac{0.834077-0.820}{3\times 0.0067}$$

مثال۵: نمونه‌های 5 تایی از فرآیندی در فواصل معین انتخاب می‌شوند در هر بار نمونه‌گیری مشخصه‌ی کیفی موردنظر اندازه‌گیری و مقادیر $\bar{X}$ و R محاسبه می‌گردند. نتایج حاصل از 25 نمونه در زیر نشان داده شده است:

$$\sum_{i=1}^{25} \bar{X}_i = 88.7738 \quad , \quad \sum R = 0.222$$

۱) حدود کنترلی نمودار $\bar{X}$ و R را به‌دست آورید.

۲) حدود تلرانس طبیعی فرایند را محاسبه کنید.

۳) اگر حدود مشخصات فنی 3.5500 ± 0.0076 باشد و نمونه‌ها دارای توزیع نرمال باشند آن‌گاه در مورد توانایی فرایند در رابطه با تولید محصولاتی که در این فاصله قرار می‌گیرند چه می‌توان گفت؟

۴) برآورد نسبت‌های قابلیت فرآیند را به‌دست آورید؟

حل :

۱)

$$\bar{X} = \frac{88.7738}{25} = 3.5510$$

$$\bar{R} = \frac{0.222}{25} = 0.00888$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.00888}{2.326} = 0.00382$$

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 3.5510 + \left(0.58 \times 0.00888\right) = 3.5562$$

$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 3.5510 - \left(0.58 \times 0.00888\right) = 3.5458$$

$$UCLR = D_4\bar{R} = 2.11 \times 0.00888 = 0.01888$$

$$LCL_R = D_3\bar{R} = 0 \times 0.00888 = 0$$

۲)

$$UNSL = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma} = 3.5510 + 0.01146 = 3.5625$$

$$LNSL = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma} = 3.5510 - 0.01146 = 3.5395$$

۳)

$$U = 3.5500 + 0.0076 = 3.5576$$

$$L = 3.5500 - 0.0076 = 3.5424$$

$$U - L = 3.5576 - 3.5424 = 0.0152$$

$$6\hat{\sigma} = 6 \times 0.00382 = 0.0382 = 0.02292$$

چون $U - L < 6\hat{\sigma}$ پس فرآیند توانایی تولید معیوب دارد.

۴)

$$L = \frac{3.5424 - 3.5510}{3 \times 0.00382} = -0.75$$

$$U = \frac{3.5576 - 3.5510}{3 \times 0.00382} = 0.579$$

بخش II: نمودارهای کنترل با تعداد نمونه زیر گروه n=1

در بعضی از موضوعات بایستی تعداد نمونه هر زیر گروه n=1 باشد در حقیقت زیر گروه‌ها تک عضوی می‌باشند. دلایل زیر می‌تواند چند مورد از این موضوعات را توضیح دهد.

۱ـ طولانی بودن زمان تولید باعث می‌شد فرصت کافی برای چند نمونه نباشد

۲ـ بازرس و تحلیل در هر محصول به طور خودکار انجام شود.

۳ـ آزمایش مجدد در صورت بروز اشتباه و خطا انجام می‌شود.

در این آزمایش‌ها که n=1 پس جمعاً m نمونه گرفته می‌شود. اگر $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$ را دامنه متحرک بنامیم می‌توانیم از $\overline{MR} = \frac{\sum_{i=2}^{m} MR_i}{m-1}$ به جای $\overline{R}$ در تهیه نمودارها استفاده کنیم. پس خط مرکزی و حدود بالا و پایین کنترل نمودار R عبارت است از:

$$CL = \overline{MR}$$
$$LCL = D_3 \overline{MR}$$
$$UCL = D_4 \overline{MR}$$

که در آن D_3, D_4 بر اساس $n = 2$ از جدول آخر فصل پیدا می‌شود. ضمناً از آن‌جا که $\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$ پس خط مرکزی و حدود بالا و پایین کنترل نمودار $\overline{X}$ عبارت است از $LCL = \overline{X} - 3\frac{\overline{MR}}{d_2}$, $CL = \overline{X}$ که d_2 بر اساس $n = 2$ از جدول آخر فصل پیدا می‌شود

$$UCL = \overline{X} + 3\frac{\overline{MR}}{d_2}$$

D_3, D_4 بازای $n = 2$ حساب شده‌اند به وضوح همه نقطه‌ها درون حدود کنترل هستند.

مثال۶: فرض کنید در یک فرآیند تولید محلول شیمیایی غلظت را برای 15 نمونه به شرح زیر اندازه‌گیری کرده‌ایم. یک عضو دارد.

با روش دامنه تغییرات متحرک وضعیت تولید را کنترل کنید.

غلظت	شماره نمونه
74.75	۱
74.05	۲
75.00	۳
74.81	۴
74.46	۵
75.02	۶
74.69	۷
74.27	۸
74.49	۹
74.2	۱۰
74.62	۱۱
74.00	۱۲
74.54	۱۳
74.12	۱۴
74.84	۱۵

حل : ابتدا جدولی را برای $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$ رسم می‌کنیم.

MR_i	شماره نمونه
	۱
0.7	۲
0.95	۳
0.19	۴
0.35	۵
0.56	۶
0.34	۷
0.41	۸
0.22	۹
0.29	۱۰
0.42	۱۱
0.62	۱۲
0.51	۱۳
0.42	۱۴
0.72	۱۵
6.73	جمع

$$CL = \overline{MR} = \frac{6.73}{14} = 0.481$$

$$UCL_R = D_4 \overline{MR} = 1.57$$

$$LCL_R = D_3 \overline{MR} = 0$$

حال برای حدود کنترل X داریم

$$CL = \bar{X} = \frac{1117.845}{15} = 74.523$$

$$UCL = 74.523 + 3\left(\frac{0.481}{1.128}\right) = 75.8$$

$$LCL = 74.523 - 3\left(\frac{0.481}{1.128}\right) = 73.24$$

که به وضوح همه نقاط درون حدود کنترل هستند.

نمودار کنترل جمع تجمعی Cumulative – Sum – Control Chart (CUSUM)

نمودارهای کنترل شوهارت به دلیل آن‌که از اطلاعات مشترک نقاط بهره‌برداری نمی‌کنند نمی‌توانند تغییرات کوچک در فرآیند را مورد توجه قرار دهند یکی از نمودارهایی که از عهده این مشکل بر می‌آید نمودار (CUSUM) می‌باشد.

فرض کنید m بار نمونه‌گیری کرده‌ایم و هر بار به تعداد $n \geq 1$ عضو نمونه در زیرگروه‌ها وجود دارد. اگر $\bar{X}_j$ میانگین نمونه jام باشد و μ_0 مقدار ایده‌آل میانگین فرایند باشد قرار دهید.

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \left(\bar{X}_j - \mu_0\right)$$

C_i جمع تجمعی نمونه iام نامیده می‌شود. در واقع C_i مجموع انحرافات میانگین نمونه‌ها از μ_0 را از اولین زیر گروه تا زیرگروه iام حساب می‌کند به نموداری که C_iها در ازای هر زیر گروه رسم می‌شود CUSUM می‌گویند.

تذکر ۱: اگر $n = 1$ یعنی زیرگروه‌ها شامل فقط یک نمونه باشند $\bar{X}_i = X_i$ و سایر روابط تغییر نمی‌کند.

تذکر ۲: با توجه به تعریف C_i اگر $\mu = \mu_0$ یعنی میانگین فرآیند در سطح ایده‌ال باقی بماند بایستی C_iها در اطراف صفر تغییر کنند.

اگر $\mu > \mu_0$ یک روند تدریجی صعودی یا مثبت در C_iها مشاهده می‌شود و اگر $\mu < \mu_0$ یک روند نزولی منفی در C_iها مشاهده می‌شود.

نتیجه: اگر یک روند صعودی یا نزولی در نقاط C_i مشاهده شود می‌توان وجود انحرافات با دلیل را پی‌گیری نموده و فرایند را خارج از کنترل تلقی کرد.

یک روش دقیق تر استفاده از ماسک V (V-Mask) می‌باشد. روش به‌کار بردن ماسک این‌طور است که نقطه O را روی آخرین C_i یعنی C_m منطبق می‌کنند طوری که پاره‌خط OP با محور افقی موازی باشد. اگر C_iها درون زاویه ماسک قرار گیرند فرآیند تحت کنترل است و اگر یک یا چند نقطه خارج از زاویه ماسک باشند فرآیند از کنترل خارج است.

تخمین میانگین جدید

وقتی نمونه $j+1$ام از کنترل خارج می‌شود (در زاویه ماسک قرار ندارد) قرار دهید.

$$\hat{\mu} = \mu_0 + \frac{C_i - C_j}{i - j}$$

$\hat{\mu}$ میانگین جدید از نمونه jام تا iام می‌باشد.

نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی Exponentially Weighted Moving Average Control Chart (EWMA)

یکی از روش‌هایی که می‌تواند این نقطه ضعف نمودارهای کنترل شوهارت را که نمی‌توانند تغییرات کوچک را شناسایی کنند برطرف نماید نمودار کنترل (EWMA) می‌باشد. این نمودار را برای وقتی $n = 1$ یعنی زیرگروه‌ها انفرادی هستند شرح می‌دهیم.

قرار دهید

$$Z_t = \lambda x_t + (1-\lambda) Z_{t-1} \quad , \quad 1 \leq t \leq m$$

که λ مقدار ثابتی است و $0 < \lambda \leq 1$ و $Z_0 = \mu_0$ یا $Z_0 = \bar{X}$

ثابت می‌شود $\sigma_{z_t}^2=\sigma^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]$ که در آن σ^2 واریانس X_i هاست.

که بدیهی است وقتی $t\to\infty$ داریم $\sigma_{z_t}^2 \longrightarrow \sigma^2\frac{\lambda}{2-\lambda}$

پس وقتی t بزرگ است.

$$CL=\mu_0$$

$$UCL=\mu_0+3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LCL=\mu_0-3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

و وقتی t کوچک است.

$$CL=\mu_0$$

$$UCL=\mu_0+3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}$$

$$LCL=\mu_0-3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}$$

نکته: وقتی تعداد نمونه زیرگروه‌ها متفاوت باشد و n_i تعداد نمونه زیرگروه i ام باشد خط مرکزی عبارت است از:

$$\bar{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

انحراف معیار نمونه‌ها عبارت است از:

$$\bar{S}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)S_i^2}{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)}}$$

که در آن S_i^2 واریانس نمونه n_i تایی است دقت شود که با توجه به آن‌که ضرایب موردنیاز بر حسب n تهیه شده‌اند می‌شود. شکل زیر یک نوع از این نمودارها را نشان می‌دهد. برای هر نمونه n_i تایی یک ضریب مخصوص و لذا حدود کنترل مربوطه تشکیل می‌شود.

نکته: با توجه به ان‌که استفاده از روابط بالا کار کردن با نمودارهای $\bar{X}$ و S را مشکل می‌کند می‌توان به‌جای به‌کار بردن همه n_iها میانگین آن‌ها یا مد آن‌ها را به‌کار برد و یک نمودار با این مقدار رسم کرد. مثلاً اگر $m=25$ و

$$n_1=n_2=n_3=n_8=n_{10}=n_{11}=n_{15}=n_{17}=n_{18}=n_{20}=n_{22}=4$$

$$n_4=n_5=n_6=n_{13}=n_{19}=n_{23}=n_{25}=65$$

$$n_7=n_9=n_{12}=n_{14}=n_{16}=n_{21}=n_{24}=6$$

می‌توانیم تمام محاسبات را با $n=4$ انجام دهیم یعنی ضرایب را با $n=4$ پیدا کنیم و $\bar{S}$ میانگین انحراف معیارهای نمونه‌هایی است که در آن‌ها $n_i=4$ بوده است و بر اساس $\bar{S}$ و محاسبه C_4 وقتی $n=4$ داریم $\hat{\sigma}=\frac{\bar{S}}{C_4}$

نمودار کنترل S^2

فرض کنید به‌جای استفاده از نمودار S بخواهیم از نمودار S^2 استفاده کنیم در این حال خط مرکزی $CL=\overline{S^2}$ میانگین واریانس‌های نمونه‌های زیر گروه‌ها می‌باشد و حد بالای کنترل به صورت

$$UCL=\frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

و حد پایین کنترل به صورت

$$LCL=\frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$$

می‌باشد. البته در این نمودار هم فرض بر این است m زیرگروه nتایی نمونه‌گیری شده است.

تابع مشخصه عملکرد برای نمودارهای $\overline{X}$ و R

با استفاده از تابع مشخصه عملکرد می‌توان توانایی نمودارهای $\overline{X}$ و R را درخصوص پی بردن به وجود تغییرات در فرایند بررسی کرد.
به عنوان یادآوری چند مفهوم را مطرح می‌کنیم.
روش‌های تصمیم‌گیری آماری برای رد یا قبول یک فرض (H_0) در برابر فرض دیگر (H_1) را آزمون فرض نامند.

احتمال خطای نوع اول و دوم

α =P (خطای نوع اول)= P (H_0 رد | H_0 درستی)

β =P (خطای نوع دوم) = P (H_0 قبول | H_0 نادرستی)

در رسم نمودارهای کنترل $\overline{X}$ و R می‌خواهیم وجود یا عدم وجود تغییرات با دلیل در فرایند را آزمون کنیم. فرض‌های صفر و اولیه را می‌توان از دو طریق مورد بررسی قرار داد. در واقع می‌توانیم برابر بودن میانگین و واریانس با مقادیر هدف‌گذاری شده را مورد آزمون قرار دهیم. یک نوع تلفیق این دو آزمون می‌تواند به صورت زیر صورت‌بندی شود.

H_0 : فقط تغییرات تصادفی در فرایند وجود دارد

H_1 : تغییرات با دلیل در فرآیند وجود دارد

پس

α = P(H_0 رد | H_0 درستی) = P (مشاهده نقاط خارج از کنترل | فرایند دارای تغییرات و خطای با دلیل نیست)

β = (H_0 قبول | H_0 نادرستی) = P (مشاهده نقاط داخل حدود کنترل | فرآیند دارای خطای با دلیل است.)

ضمناً می‌دانیم به

$\Pi(\theta)$ = P (H_0 رد) = $\begin{cases} 1-\alpha & H_0 \text{ درستی} \\ 1-\beta & H_0 \text{ نادرستی} \end{cases}$ تابع توان و به

OC(θ) = P (H_0 قبول) = $\begin{cases} 1-\alpha & H_0 \text{ درستی} \\ \beta & H_0 \text{ نادرستی} \end{cases}$ تابع مشخصه عملکرد می‌گویند.

فرض کنید انحراف معیار جامعه و ثابت معلوم و برابر σ باشد و میانگین جامعه از مقدار تحت کنترل خود مثلاً μ_0 به $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$ انتقال یابد. احتمال خطای نوع دوم عبارت است از:

$$\beta = P(\mu = \mu_0 \ (H_0 \ \text{قبول}) | \mu = \mu_1 \ (H_1 \ \text{درستی}))$$
$$= P\left(LCL \le \bar{X} \le UCL | \mu = \mu_1 = \mu_0 + K\sigma\right)$$

حال با توجه به آن‌که $X_i \overset{i.i.d}{\sim} N\left(\mu, \sigma^2\right)$ داریم

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

و

$$LCL = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad UCL = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

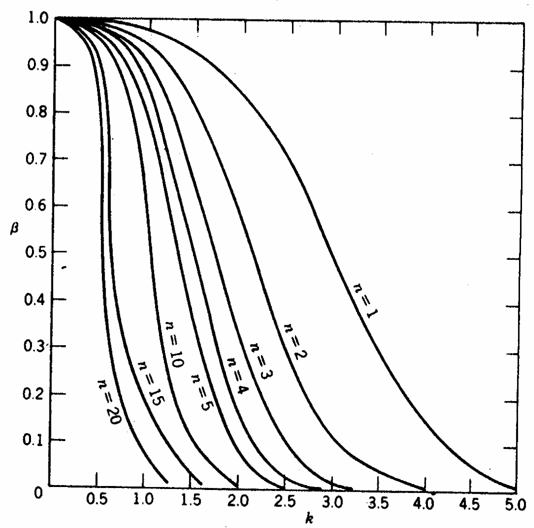
در نتیجه

$$\beta = P\left(\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_0 + K\sigma\right)$$
$$= P\left(-3 - K\sqrt{n} \le \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 3 - K\sqrt{n}\right)$$

که

$$= \Phi\left(3 - K\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-3 - K\sqrt{n}\right)$$

اگر K روی محور افقی و β روی محور عمودی رسم شود نمودارهای OC با توجه به مقدار n رسم می‌شود.



مثال۷: قطر یک شفت پیستون ماشین دارای توزیع نرمال با میانگین 3 و انحراف معیار 2 می‌باشد. اندازه‌ی نمونه‌ها برابر 9 است.

۱) حدود نمودار کنترل $\bar{X}$ با 3 انحراف معیار برای کنترل این مشخصه کیفی به‌دست آورید.

۲) اگر $\alpha = 0.05$ در نظر گرفته شود حدود کنترل را برای کنترل این مشخصه‌ی کیفی به‌دست اورید.

۳) اگر میانگین فرایند به 4 تغییر کند، احتمال پی بردن به حالت خارج از کنترل بودن حداقل تولید به‌وسیله دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر در فرآیند چیست؟

۴) اگر میانگین فرآیند به 4 تغییر کند، احتمال این‌که از 4 نقطه متوالی حداقل 3 نقطه خارج از کنترل بیافتد را محاسبه کنید.

۱)

$$UCL = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 + 3\times\frac{2}{3} = 5$$

$$CL = \mu = 3$$

$$LCL = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} = 3 - \frac{3\times 2}{3} = 1$$

۲)

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 + 1.96\times\frac{2}{3} =$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 - 1.96\times\frac{2}{3} =$$

$$UCL\overline{X} = 3 + 3\times\frac{2}{3} = 5$$

$$CL_X = 3$$

$$LCL_{\overline{X}} = 3 - \frac{3\times 2}{3} = 1$$

۳)

$$\beta = P\left(1 < \overline{x} < 5 \middle| \mu = 4\right) = P\left(\frac{1-4}{\frac{2}{3}} < Z < \frac{5-4}{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$P\left(-4.5 < Z < 1.5\right) = 0.93319$$

$$P = \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) + \cdots = \beta\times(1-\beta)\frac{1}{(1-\beta)} = 0.93319$$

۴)

$$\binom{4}{3}\times\beta\times(1-\beta)^3 + \binom{4}{4}(1-\beta)^4 =$$

تعریف ARL

$$ARL = \frac{1}{P\text{ (مشاهده یک نقطه خارج از حدود کنترل)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{فرایند واقعاً در کنترل است} \\ \dfrac{1}{1-\beta} & \text{فرایند واقعاً خارج از کنترل است} \end{cases}$$

زیرا

$$P\text{ (مشاهده یک نقطه خارج از حدود کنترل)} = P(\text{رد } H_0) = \begin{cases} \alpha & H_0 \text{ درستی} \\ 1-\beta & H_0 \text{ نادرستی} \end{cases}$$

همان تابع توان است که در دو حالت درستی و نادرستی H_0 مقادیر α و $1-\beta$ را می‌گیرد.

به عنوان مثال وقتی $K = 1.5, n = 2$ داریم $\beta = 0.8$ یعنی احتمال آن‌که با نمونه 2 تایی به وجود تغییر 1.5σ پی ببریم 0.8 است حال احتمال کشف این تغییر توسط نمونه اول بعد از ایجاد آن $1-\beta = 0.2$ است و احتمال کشف توسط نمونه دوم $\beta(1-\beta) = 0.16$ و به همین صورت

P (Kامین نمونه در میانگین به‌وسیله 1.5σ پی بردن به وجود تغییر) $= \beta^{K-1}(1-\beta)$

دقت شود تابع فوق بر حسب K تابع احتمال هندسی با پارامتر $P = 1-\beta$ است.

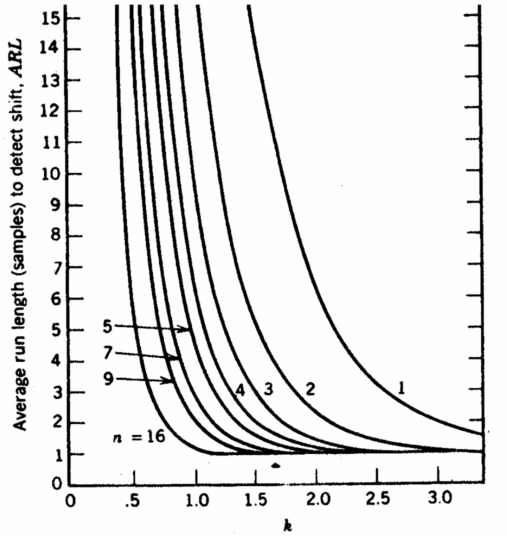
حال اگر ARL (Average Run Lentgh) متوسط تعداد نمونه‌ها قبل از پی بردن به وجود تغییر باشد مقدار آن برابر است با متوسط طول دنباله و یا:

$$ARL = \sum_{k=1}^{\infty} K\beta^{k-1}(1-\beta) = \frac{1}{1-\beta}$$

بنابراین با $\beta = 0.3$ داریم $ARL = \frac{1}{0.2} = 5$ یعنی متوسط تعداد نمونه لازم برای تشخیص تغییر در حالت 1.5σ با n=2 برابر m=5 است یعنی باید به‌طور میانگین 5 بار نمونه‌های 2 تایی بگیریم تا به وجود تغییر 1.5σ پی ببریم.

با تو جه به رابطه‌ای که برای ARL پیدا شد با داشتن β می‌توان ARL را رسم کرد و β در رابطه * تابعی از k و n می‌باشد پس ARL تابعی از n و k می‌باشد.

در شکل زیر نمودارهای ARL را برای نمونه‌های n تایی مختلف و مقادیر متفاوت k رسم کرده‌ایم.



این نمودار میانگین تعداد نمونه‌های n تایی برای نمودار $\bar{X}$ با حدود سه انحراف معیار را وقتی μ تغییری به اندازه $k\sigma$ دارد نشان می‌دهد.

تذکر: اگر تعداد کل نمونه‌ها را به صورت انفرادی بخواهیم بایستی ARL را در n ضرب کنیم.

$$I = n\,ARL$$

که I تعداد اقلام انفرادی (Individual Units) را نشان می‌دهد.

تذکر: اگر نمونه‌ها در فاصله‌های زمانی برابر h برداشته شوند میانگین زمان لازم تا مشاهده یک تغییر عبارت است از:

$$ATS = h.ARL$$

که ATS مخفف Average Time to Signal می‌باشد و متوسط زمان تا هشدار یا متوسط زمان تا علامت نامیده می‌شود.

مثال۸: در صورتی که در یک نمودار شوهارت مقدار $ARL = 10$ باشد احتمال پی بردن به وجود تغییر بوسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد تغییر را محاسبه کنید؟

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = 10 \quad , \quad 1-\beta = \frac{1}{10} \quad , \quad \beta = \frac{9}{10}$$

P (احتمال پی بردن به تغییر توسط اولین نمونه) $= 1-\beta = \frac{1}{10}$

مثال۹: در صورتی که $ARL = 4$ باشد در یک نمودار شوهارت احتمال پی بردن به تغییر در حداقل 2 نمونه‌ی اول چقدر است؟

$$ARL = 4 \qquad \frac{1}{1-\beta} = 4 \qquad 1-\beta = \frac{1}{4} \qquad \beta = \frac{3}{4}$$

P (احتمال پی بردن به تغییر) $=\beta(1-\beta)+\beta^2(1-\beta)+\cdots = \beta\left(1-\frac{1}{(1-\beta)}\right) = 0.75$

بررسی روندها

به‌طور کلی وقتی فرایند خارج از کنترل تشخیص داده می‌شود که یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱ـ حداقل یک نقطه از حدود کنترل خارج گردد.

۲ـ یک روند غیرتصادفی در نقاط داخل حدود کنترل مشاهده گردد.

در مورد حالت ۲ لازم است توضیحات بیشتری ارائه گردد. و حالت ۱ نیاز به توصیح ندارد.

با توجه به آن‌که حدود کنترل غالباً به صورت متقارن نوشته می‌شوند می‌توان توزیع تعداد نقاط داخل حدود کنترل و بالای خط مرکزی را توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای m و $p = \frac{1}{2}$ فرض کرد.

البته فرض بر این است که حالت ۱ رخ نداده یعنی تمام نقاط داخل حدود کنترل هستند. حال با توجه به روابط احتمال در توزیع دوجمله‌ای احتمال آن‌که چندین نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی قرار گیرند خیلی ضعیف است و لذا می‌توان گفت در صورت رخ دادن چنین پدیده‌ای فرایند از کنترل خارج است و تغییرات با دلیل وجود دارد.

دو دستورالعمل زیر به طور تجربی راه‌کارهایی اجرایی برای قضاوت پیشنهاد داده‌اند و به ترتیب از کتاب‌های گرانت و مونتگیری اقتباس گردیده‌اند.

در حقیقت به کار بستن این دستورالعمل‌ها، باعث حساسیت بیشتر در کنترل فرایند آماری می‌گردند.

الف) در صورت مشاهده یکی از حالات زیر فرایند از کنترل خارج می‌شود، حدود کنترل در این دستورالعمل ثابت هستند.

۱ـ وجود هفت نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۲ـ وجود حداقل ده نقطه از 11 نقطه متو الی در یک طرف خط مرکزی

۳ـ وجود حداقل 12 نقطه از 14 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۴ـ وجود حداقل 14 نقطه از 17 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۵ـ وجود حداقل 16 نقطه از 20 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

(ب) در این دستورالعمل بر اساس حالت‌های زیر در حدود کنترل $k\sigma$ فرایند از کنترل خارج می‌شود:

۱) وجود یک نقطه خارج از حدود 3 انحراف معیار

۲) وجود چهار نقطه از 5 نقطه متوالی خارج از حدود یک انحراف معیار

۳) وجود هشت نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۴) وجود دو نقطه از 3 نقطه متوالی خارج از حدود دو انحراف معیار

این دستورالعمل از کتاب راهنمای وسترن الکتریک در سال ۱۹۵۶ اقتباس شده است.

نکته: استفاده از هر قاعده برای آن‌که فرایند را خارج از کنترل اعلام کنیم باعث ایجاد خطای نوع اول مخصوص به خود می‌گردد حال اگر از K قاعده استفاده شود و قاعده i ام مستقل از سایرین دارای احتمال خطای نوع اول α_i باشد ان‌گاه احتمال خطای نوع اول تصمیم‌گیری در کل عبارت است از:

$\alpha = P$ (واقعاً فرایند تحت کنترل باشد | اعلام فرایند خارج از کنترل)

$=1-P$ (واقعا فرایند تحت کنترل باشد | اعلام فرایند تحت کنترل)

$=1-\prod_{i=1}^{k} P$ (واقعاً فرآیند تحت کنترل باشد | اعلام تحت کنترل بودن فرایند با قاعده i ام)

$=1-\prod_{i=1}^{k} \Big(1-P$ (واقعاً فرایند تحت کنترل باشد | اعلام خارج از کنترل بودن فرآیند با قاعده i ام)$\Big)$

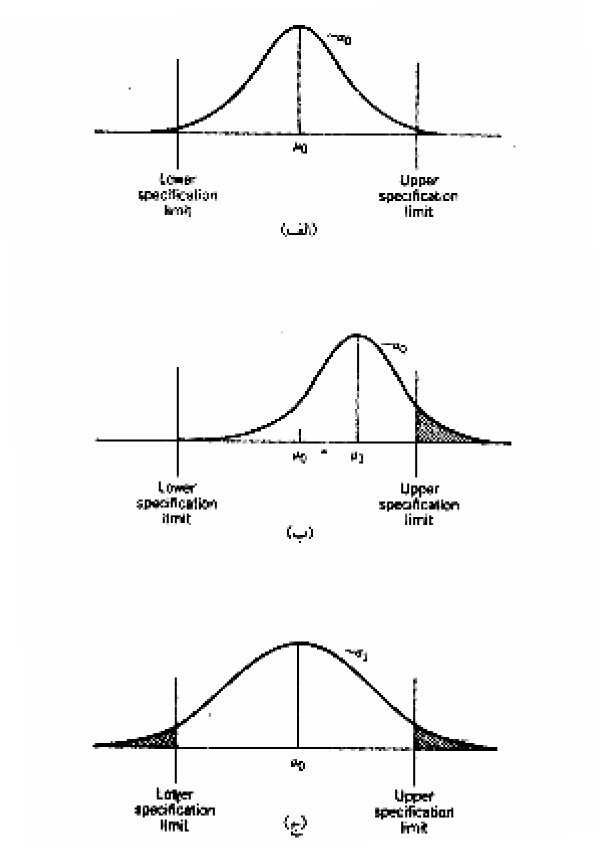
$$=1-\prod_{i=1}^{k}\left(1-\alpha_i\right)$$

همان‌طور که مشهود است زیاد شدن تعداد قواعد (K) باعث افزایش α می‌شود طوری که مثلاً وقتی $k=3$ و $\alpha_i = 0.05$ داریم:

$$\alpha = 0.1426$$

نکته: لزوم بررسی هر دو پارامتر میانگین و تغییرپذیری در کنترل فرایند

به شکل زیر توجه کنید.



در (الف) فرایند کنترل است. در (ب) به دلیل انتقال میانگین از μ_0 به μ_1 فرایند از کنترل خارج شده و در (ج) به دلیل زیاد شدن σ ارتفاع نمودار کاهش یافته فرایند در دو طرف از کنترل خارج شده است.

نکته: هر چند n بزرگتر شود کارایی نسبی روش $\bar{R}$ نسبت به روش S^2 کمتر می‌شود. این مطلب به دلیل آن است که دامنه تغییرات R فقط به دو داده بزرگترین و کوچکترین توجه دارد و به بقیه توجه نمی‌کند جدول زیر کارایی نسبی را بر حسب n نشان می‌دهد.

کارایی نسبی e	n
1	2
0.992	3
0.975	4
0.975	5
0.93	6
0.85	10

نکته: حدود احتمال برای نمودارهای $\bar{X}$ و R

می‌دانیم معمولاً در نمودارهای کنترل از ضریب 3 انحراف معیار استفاده می‌شود با این ضریب معمولاً احتمال وقوع خطای نوع اول حدود $\alpha = 0.027$ است یک روش آن است که حدود K انحراف معیار را بر حسب احتمال خطای نوع اول پیدا کنیم. با توجه به $P\left(\left|X-\mu\right|<K\sigma\right)=1-\alpha$ و $P\left(\left|Z\right|<K\right)=1-\alpha$ می‌توان نوشت

$K = Z_{\frac{\alpha}{2}}$

در مورد توزیع $W=\frac{R}{\sigma}$ با توجه به آن‌که تقارن وجود ندارد می‌توانیم بنویسیم $\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}$ و لذا $LCL = D_{\frac{\alpha}{2}}\bar{R}$ و $UCL = D_{1-\frac{\alpha}{2}}\bar{R}$ که

$$D_{1-\frac{\alpha}{2}} = W_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{(n)}{d_2}$$

مقادیر $D_{\frac{\alpha}{2}}$, $D_{1-\frac{\alpha}{2}}$ را به ازای مقدار $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.002$, $\alpha = 0.05$ می‌توان در جدول زیر پیدا کرد. این جدول از کتاب گرانت اقتباس شده است.

حدود بالا			حدود پایین			اندازه
$B_{0.999}$	$B_{0.995}$	$B_{0.975}$	$B_{0.025}$	$B_{0.005}$	$B_{0\cdot 001}$	n
3.30	2.81	2.25	0.03	0.00	0.00	2
2.63	2.30	1.92	0.16	0.07	0.04	3
2.33	2.07	1.77	0.27	0.15	0.09	4
2.15	1.92	1.67	0.35	0.22	0.15	5
2.03	1.83	1.60	0.41	0.28	0.21	6
1.93	1.76	1.56	0.45	0.33	0.25	7
1.86	1.70	1.52	0.49	0.37	0.29	8
1.80	1.65	1.48	0.52	0.41	0.33	9
1.76	1.62	1.45	0.55	0.44	0.36	10

حدود بالا			حدود پایین			اندازه
$D_{0.999}$	$D_{0.995}$	$D_{0.975}$	$B_{0.025}$	$D_{0.005}$	$D_{0\cdot 001}$	n
4.65	3.97	3.17	0.04	0.01	0.00	2
5.06	4.42	3.68	0.30	0.13	0.06	3
5.31	4.69	3.98	0.59	0.34	0.20	4
5.48	4.89	4.20	0.85	0.55	0.37	5
5.62	5.03	4.36	1.07	0.75	0.53	6
5.73	5.15	4.49	1.25	0.92	0.69	7
5.82	5.25	4.60	1.41	1.08	0.83	8
5.90	5.34	4.70	1.55	1.21	0.97	9
5.97	5.42	4.78	1.67	1.33	1.08	10

جدول خلاصه نمودارهای کنترل متغیرها

ردیف	نوع نمودار و شرایط	خط مرکزی CL	حد بالای کنترل	حد پایین کنترل
۱	$\bar{X}$ (σ,μ معلوم)	μ	$\mu+A\sigma$	$\mu-A\sigma$
۲	R (σ معلوم)	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$	$D_1\sigma$
۳	S (σ معلوم)	$C_4\sigma$	$B_6\sigma$	$B_5\sigma$
۴	$\bar{X}$ (σ مجهول و برآورد به کمک $\bar{R}$)	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}}+A_2\bar{R}$	$\bar{\bar{X}}-A_2\bar{R}$
۵	$\bar{X}$ (σ مجهول و برآورد به کمک $\bar{S}$)	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}}+A_3\bar{S}$	$\bar{\bar{X}}-A_3\bar{S}$
۶	R (σ مجهول)	$\bar{R}$	$D_4\bar{R}$	$D_3\bar{R}$
۷	S (σ مجهول)	$\bar{S}$	$B_4\bar{S}$	$B_3\bar{S}$
۸	MR,R	$\overline{MR}=\dfrac{\sum \lvert X_i-X_{i-1}\rvert}{m-1}$	$D_3\overline{MR}$	$D_4\overline{MR}$
۹	MR , X	$\bar{X}$	$\bar{X}+\dfrac{3\overline{MR}}{d_2}$	$\bar{X}-3\dfrac{\overline{MR}}{d_2}$
۱۰	EWMA	$\bar{X}$	$\bar{X}+AS$	$\bar{X}-A^*S$
۱۱	EWMD	Sd_c^*	D_2^*S	D_1^*S

تست‌ها

۱ ـ رینگ‌های پیستون موتور اتومبیلی طی یک فرایند خاص تولید می‌شوند، 25 نمونه 5 تایی در شرایط کنترل انتخاب شده و نتایج عبارت است از:

$$\sum \bar{X}_i = 1850$$
$$\sum R_i = 0.581$$

نمودار کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(74.014, 74.45)$ ۲) $(73.98, 74.014)$ ۳) $(74, 75)$ ۴) $(74.18, 74.92)$

۲ ـ با مراجعه به سوال قبل نمودار R کدام است؟

۱) $(0, 0.023)$ ۲) $(0, 0.075)$ ۳) $(0, 0.049)$ ۴) $(0, 0.061)$

۳ ـ یک کارخانه سازنده پودر ضدعفونی کننده برای کنترل مقدار درصد وزنی ماده‌ی موثر پودر ضدعفونی کننده‌ی محصول خود از نمودار کنترل $S, \bar{X}$ استفاده می‌کند، جهت این‌کار 20 نمونه هر کدام باندازه 6 برداشته شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

$$\sum \bar{X}_i = 160 \quad , \quad \sum S_i = 0.4$$

حدود کنترل نمودار $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(7.42, 8.1)$ ۲) $(7.65, 8.22)$ ۳) $(7.98, 8.026)$ ۴) $(6.87, 8.12)$

۴ ـ با مراجعه به تست قبل حدود کنترل S برای مشخصه‌ی موردنظر کدام است؟

۱) $(0, 0, 04)$ ۲) $(0.0006, 0.039)$ ۳) $(0, 0.025)$ ۴) $(0, 0.039)$

۵ ـ اگر $USL - LSL > 6\sigma$ باشد داریم که ....

۱) وضعیت نامطلوب است.

۲) وضعیت بحرانی ولی قابل کنترل است.

۳) وضعیت مطلوب است.

۴) فرایند توانایی ساخت محصول را در حدود مشخصات فنی ندارند.

۶ ـ اگر شاخص قابلیت فرایند برابر با 1.11 و حدود مشخصه‌ی فرایند $(6.3, 6.5)$ باشد انحراف معیار چقدر است؟

۱) 0.05 ۲) 1 ۳) 0.03 ۴) 0.06

۷ ـ با مراجعه به مساله‌ی قبل نسبت قابلیت کدام است؟

۱) 0.9 ۲) 1 ۳) 0.03 ۴) 1.33

۸ ـ یک فرآیند جدید که مجموع انحراف‌های 25 زیرگروه به اندازه 4 در آن برابر 600 می‌باشد شروع به کار نموده است اگر مشخصات فنی برابر با 700 ± 45 با شدت شاخص قابلیت فرایند برابر است با:

۱) 1.28 ۲) 0.78 ۳) 1 ۴) 0.25

۹ ـ در سوال قبل نسبت قابلیت برابر است با:

۱) 0.78 ۲) 1 ۳) 1.28 ۴) 0.25

۱۰ ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر برای کنترل متغیرهای پیوسته با اندازه زیر گروه‌های برابر با یک کاربرد دارد؟

۱) EWMA ۲) EMWA ۳) EMWD ۴) $\bar{X}$ و R

۱۱ ـ برای کنترل وزن قوطی‌های پر شده نوعی کنسرو و نمونه‌های 5 تایی هر سی دقیقه یک‌بار برداشته شده و در طول یک روز کاری 20 نمونه گرفته شده است.

$$\sum R_i = 41 \quad , \quad \sum \bar{X}_i = 243.8$$

حدود کنترل نمودار R کدام است؟

۱) $(0,4.55)$ ۲) $(0,4.75)$ ۳) $(0,4.33)$ ۴) $(0,5.71)$

۱۲ ـ با توجه به مساله‌ی قبل حدود کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(11.01,13.37)$ ۲) $(10.12,12.45)$ ۳) $(11.27,13.22)$ ۴) $(11.5,13.45)$

۱۳ ـ در سوال قبلی اگر میانگین نوزدهم برابر 13.5 بوده و از حد بالای کنترل خارج باشد حدود کنترل $\bar{X}$ اصلاح شده کدام است؟

۱) $(10.93,13.3)$ ۲) 10.45,13.70 ۳) 11.24,13.25 ۴) 12.5,13.45

۱۴ ـ در سوال ۲ فرض کنید $\sum_i S_i = 0.24$ باشد حدود نمودار $\bar{X}$ را به‌دست آورید؟

۱) $(11.01,13.37)$ ۲) $(10.12,12.45)$ ۳) $(12.173,12.207)$ ۴) $(12.5,13.45)$

۱۵ ـ با مراجعه به سوال قبل حدود نمودار S کدام است؟

۱) $(0,0.021)$ ۲) $(0,0.025)$ ۳) $(0,0.02)$ ۴) $(0,0.012)$

۱۶ ـ در یک نمودار کنترل با حدود آزمایشی ......

۱) در ابتدای تولید محصول استفاده می‌شود.

۲) با شناسایی علل غیرتصادفی در داخل حدود کنترل، ریشه‌یابی و حذف آن‌ها نمودار کنترل اصلاح شده به‌دست می‌آید.

۳) با شناسایی نقاط خارج از کنترل دارای علل غیرتصادفی، ریشه‌یابی و حذف آن‌ها، حدود کنترل نماینده‌های واقعی‌تری از فرایند خواهد بود.

۴) همه موارد

۱۷ ـ قطعاتی بر اساس قطر خارجی 12.5mm و مشخصات 12.5 ± 0.05 تراشکاری می‌شوند. اگر فرآیند مربوط که دارای توزیع نرمال است در 12.5 متمرکز باشند انحراف معیار آن برابر 0. 3 باشد چند درصد از قطعات تولیدی مردود خواهند بود؟

۱) حدود 5 درصد ۲) حدود 10 درصد ۳) حدود 15 درصد ۴) حدود 20 درصد

۱۸ ـ چنانچه در سوال قبلی میانگین فرایند به مقدار 12.53mm افزایش یابد از قطعات تولیدی مردود خواهند بود؟

۱) حدود 8 درصد ۲) حدود 15 درصد ۳) حدود 20 درصد ۴) حدود 25 درصد

۱۹ـ اگر قطر یک شفت دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد و میانگین فرایند به علت مشکلات تولیدی به اندازه‌ی 2σ افزایش پیدا کند احتمال خطای نوع دوم را به‌دست آورید؟

۱) 0　　۲) 0.977　　۳) 0.8413　　۴) 1

۲۰ـ اگر در یک نمودار کنترل بر اساس چهار تصمیم مستقل مشاهده نقطه خارج از حدود ۱ و ۲ و ۳ و ۴ انحراف معیار موجب اعلام خروج فرآیند از کنترل باشد احتمال خطای نوع اول در این تصمیم کدام است؟

۱) 1　　۲) 0　　۳) 0.65　　۴) 0.35

۲۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) واقع شدن چهار نقطه به‌صورت روند در حدود هشدار نشان دهنده‌ی فرایند خارج از کنترل می‌باشد.

۲) واقع شدن 2 نقطه در حدود هشدار نشان دهنده‌ی فرایند خارج از کنترل می‌باشد.

۳) در صورتی که منابع تغییر غیرتصادفی بررسی و رفع شوند و نقاط بین حدودکنترل باشند فرایندی تحت کنترل و پایدار است.

۴) قوانین وستون اکتریک را در هر لحظه فقط در یک سمت خط مرکزی می‌توان استفاده کرد.

۲۲ـ چنانچه ARL برای یک نمودار در یک شیفت مشخص برابر با 10 باشد تغییری در میانگین سیستم تولیدی رخ داده است. متوسط تعداد نقاطی که روی نمودار کنترل رسم می‌شود تا یک نقطه خارج از حدودکنترل مشاهده شود کدام گزینه است؟

۱) 10　　۲) 0.1　　۳) 9　　۴) 0.9

۲۳ـ در تست قبل واریانس تعداد نقاط کدام گزینه است؟

۱) 0.99　　۲) 0.09　　۳) 0.01　　۴) 1

۲۴ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=4, \sigma=12\ ,\ \mu=600$ موردنظر است در صورتی که $M=500$ تغییر کند احتمال پی بردن به خارج از کنترل بودن حداقل به‌وسیله‌ی دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر در فرآیند چیست؟

$Z=2 \quad , \quad \alpha=0.05$

۱) 1　　۲) 0　　۳) 0.5　　۴) 0.01

۲۵ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=4, \sigma=4\ ,\ \mu=100$ موردنظر است در صورتی که متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل بودن100 شود. حد پایین بالای نمودار کنترل $\bar{X}$ چقدر است؟

۱) 105.1　　۲) 94.86　　۳) 104.7　　۴) 95.3

۲۶ـ در صورتی که ARL برای یک نمودار کنترل به ازای یک دوره‌ی خاص برابر 5 باشد، احتمال پی بردن به وجود تغییر حداکثر به‌وسیله‌ی سومین نمونه بعد از ایجاد تغییر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{20}{75}$　　۲) $\frac{9}{25}$　　۳) $\frac{7}{25}$　　۴) $\frac{7}{75}$

۲۷ـ در تست قبلی احتمال پی بردن به وجود تغییر حداقل به‌وسیله‌ی دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر کدام گزینه است؟

۱) 0.8　　۲) 0.2　　۳) 0.25　　۴) 0.75

۲۸ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=36, \sigma=12, \mu=600$ موردنظر است. حدود کنترل پایین را با در نظر گرفتن ریسک α برابر با 0.05 تعیین کنید؟ $(Z_{0.025} \approx 2)$

۱) 399　　۲) 600　　۳) 596　　۴) 300

۲۹ـ به منظور کنترل قطر رینگ پیستون از نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و S استفاده می‌شود و در هر بار نمونه‌گیری 10 نمونه بررسی می‌شوند. و در تجارب قبلی اگر فرآیند تحت کنترل باشد قطر رینگ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 80mm^2$ و انحراف معیار $\sigma = 10mm$ خواهد بود حد بالای نمودار کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) 70.51 ۲) 89.49 ۳) 90.36 ۴) 85.46

۳۰ـ در تست قبلی حد پایین نمودار کنترل S کدام است؟

۱) 0 ۲) 9.727 ۳) 16.69 ۴) 2.76

۳۱ـ وزن خالص یک پودر شوینده قرار است به وسیله نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R با نمونه‌های 6 تایی که 50 نمونه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورتی که $\sum_{i=1}^{50} R_i = 200$, $\sum_{i=1}^{50} \bar{X}_i = 2000$ باشد و مشخصه کیفی دارای توزیع نرمال به صورت 41 ± 5 باشد و محصولی که پایین‌تر از حد مشخصه‌ی فنی باشد به عنوان دور ریز حساب شود. آن‌گاه چند درصد محصولات از فرآیند به‌صورت دورریز می‌باشد؟

۱) %5.7 ۲) %0.57 ۳) %0.07 ۴) %0.007

۳۲ـ خط مرکزی نمودار کنترل کنترل قدرت کششی یک قطعه‌ی فلزی برابر با 100 است و حدود کنترل سه انحراف معیار آن بر اساس اندازه نمونه‌های چهارتایی محاسبه گردیده است. اگر انحراف معیار فرآیند برابر با 6 باشد و میانگین از 100 به 92 تغییر کند احتمال پی بردن به وجود این تغییر به‌وسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد چه مقدار خواهد بود؟

۱) 0.63 ۲) 0.73 ۳) 0.37 ۴) 0.47

۳۳ـ یک نمودار $\bar{X}$ با حدود کنترل سه انحراف معیار دارای پارامترهای

$$UCL_{\bar{X}} = 104$$
$$CL_{\bar{X}} = 100$$
$$LCL_{\bar{X}} = 99$$

است. فرض کنید مشخصه‌ی کیفی موردنظر دارای توزیع نرمال با میانگین واقعی 98 و انحراف معیار 8 است. در صورتی که $n = 5$ باشد متوسط طول دنباله کدام گزینه است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 4

۳۴ـ داده‌های مربوط به گران روی پلیمر در 20 مورد به‌صورت زیر می‌باشد حد بالا دامنه‌ی متحرک برای حالت 2 نمونه در هر بار نمونه‌گیری کدام گزینه است؟ $\overline{MR} = 0.0377$ $\quad \bar{\bar{X}} = 5.75$

۱) 0.1232 ۲) 0 ۳) 0.0377 ۴) 5.8568

۳۵ـ در تست قبلی حد پایین مشاهدات انفرادی مقادیر میانگین کدام گزینه است؟

۱) 5.85 ۲) 5.65 ۳) 5.75 ۴) 0.1232

پاسخنامه

۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum X_i = 1850$$
$$\sum R_i = 0.581 \qquad \overline{\overline{X}} = \frac{1850}{25} = 74$$
$$UCL\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 74 + 0.577 \times 0.023 = 74.014$$
$$\overline{R} = \frac{0.581}{25} = 0.023$$
$$LCL\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 74 - 0.577 \times 0.023 = 73.98$$

۲ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$UCLR = D_4\overline{R} = 2.11 \times 0.023 = 0.04853$$
$$LCLR = D_3\overline{R} = 0$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\sum \overline{X}_i = 160 \quad \overline{\overline{X}} = \frac{160}{20} = 8$$
$$\sum S_i = 0.4 \quad \overline{S}_i = \frac{0.4}{20} = 0.02$$
$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} = 8 + 1.287 \times 0.02 = 8.025$$
$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3 S = 8 - 1.287 \times 0.02 = 7.974$$

۴ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL_S = B_4\overline{S} = 1.97 \times 0.02 = 0.0394$$
$$LCL_S = B_3\overline{S} = 0.03 \times 0.02 = 0.0006$$

۵ ـ گزینه ۳ صحیح است.

۶ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{0.2}{6\hat{\sigma}} = 1.11 \Rightarrow \hat{\sigma} = 0.03$$

۷ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{نسبت قابلیت فرآیند} = \frac{1}{1.11} = 0.9$$

۸ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} =$$
$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \quad , \quad \hat{\sigma} = \frac{24}{2.059} = 11.65$$

$$\bar{R}=\frac{600}{25}=24 \quad , \quad \hat{C}_p=\frac{90}{6\times 11.65}=1.28$$

۹ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{1}{1.28}=0.78$$

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح است.

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{R}=2.05 \qquad UCLR=D_4\bar{R}=2.14\times 2.05=4.33$$
$$LCRR=D_3\bar{R}=0$$

۱۲ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$UCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}+A_2\bar{R}=12.19+0.58\times 2.05=13.37$$
$$\bar{\bar{X}}=12.19$$
$$LCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}-A_2\bar{R}=12.19-0.58\times 2.05=11.01$$

۱۳ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\sigma_0=\frac{R_0}{d_2}=\bar{X}_0=\frac{243.8-13.5}{19}=12.12$$
$$UCL\bar{X}=\bar{X}_0+A\sigma_0=12.12+1.342x$$
$$LCL\bar{X}=\bar{X}_0-A\sigma_0=$$

۱۴ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{S}=\frac{0.24}{20}=0.012$$
$$\bar{\bar{X}}=12.19$$
$$UCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}+A_3\bar{S}=12.19+1.427\times 0.012=12.207$$
$$LCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}-A_3\bar{S}=12.19-1.427\times 0.012=12.173$$

۱۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL_S=B_4\bar{S}=2.089\times 0.012=0.025$$
$$LCL_S=B_3\bar{S}=0$$

۱۶ ـ گزینه ۴ صحیح است.

۱۷ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$P\left(12<X<13\middle|\mu=12.5\right)=P\left(\frac{-0.5}{0.3}<Z<\frac{0.5}{0.3}\right)=P\left(-1.66<Z<1.66\right)=0.9$$

$1-P$ (در حدود باشد) $=0.1$

۱۸ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$1-P\left(12<X<13\middle|\mu=12.53\right)=1-P\left(\frac{-0.53}{0.3}<Z<\frac{0.53}{0.3}\right)$$
$$1-P\left(-1.76<Z<1.76\right)=0.92$$
$$1-0.92=0.08$$

۱۹ ـ گزینه ۳ صحیح است.

راه‌حل:

$$P\left(\mu_0-3\sigma<x<\mu_0+3\sigma\middle|\mu_1=\mu_0+2\sigma\right)$$
$$=P\left(\frac{\mu_0-3\sigma-\mu_0-2\sigma}{\sigma}<Z<\frac{\mu_0+3\sigma-\mu_0-2\sigma}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(-5<Z<1\right)=0.8413$$

۲۰ ـ گزینه ۳ صحیح است.

راه‌حل اول:

$$\alpha_{\text{Total}}=1-\prod_{i=1}^{4}\left(1-\alpha_i\right)=1-\left[\left(1-0.045\right)\left(1-0.317\right)\times\left(1\right)\left(1-0.0027\right)\right]=0.65$$

α_1 برای 3 انحراف معیار از روی جدول توزیع نرمال 0.0027

α_2 برای 2 انحراف معیار 0.0455

α_3 برای 1 انحراف معیار 0.31732

۲۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

۲۲ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=10 \qquad 1-\beta=\frac{1}{10} \qquad \beta=\frac{9}{10}$$

احتمال این‌که پی بردن به نقطه خارج از حدود کنترل برابر $1-\beta=\frac{1}{10}$ می‌باشد.

دارای توزیع هندسی (رسیدن به موفقیت در این‌جا یعنی مشاهده‌ی نقطه خارج از کنترل است)

پس دارای میانگین $\frac{1}{P}$ است و میانگین تعداد همان 10 می‌شود.

۲۳ ـ گزینه ۲ صحیح است.

چون دارای توزیع هندسی است پس واریانس برابر $\frac{q}{P^2}$ می‌باشد.

$$\frac{q}{P^2}=\frac{0.9}{\left(0.1\right)^2}=0.09$$

۲۴ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL=600+2\times\frac{12}{2}=612$$

$$CL=600$$

$$\beta = P\left(588 < \overline{X} < 612 \middle| M = 500\right) = P\left(\frac{588-500}{\frac{12}{2}} < Z < \frac{612-500}{\frac{12}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{88}{6} < Z < \frac{12}{2}\right) = P\left(14.66 < Z < 18.66\right) = 0$$

با توجه به $1-\beta = 1$ توسط همان نمونه اول مشخص می‌شود. پس احتمال پی بردن توسط حداقل دومین نمونه صفر می‌شود.

۲۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = 100 = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \alpha = 0.01 \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 + 2.57 \times \frac{4}{2} = 105.14$$

$$LCL = 100 - 2.57 \times \frac{4}{2} = 94.86$$

۲۶ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$P\,(\text{پی بردن به تغییر حداکثر به‌وسیله سومین نمونه}) = (1-\beta) + \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25} = 0.28$$

۲۷ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$P(\text{پی بردن به تغییر حداقل به وسیله دومین نمونه}) = \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) + \beta^3(1-\beta) + \cdots = \beta(1-\beta) \times \frac{1}{1-\beta} = \beta = \frac{4}{5} = 0.8$$

۲۸ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 + 2 \times \frac{12}{6} = 604$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 - 2 \times \frac{12}{6} = 596$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

۲۹ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$n = 10 \qquad \sigma_0 = 10 \qquad A = 0.949$

$$UC\overline{X} = \mu + A\sigma_0 = 80 + 0.949 \times 10 = 89.49$$

$$CL\overline{X} = \mu = 80$$

$$LCL\overline{X} = \mu - A\sigma_0 = 80 - 0.949 \times 10 = 70.51$$

۳۰ ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$UCLS = B_6\,\sigma = 1.669 \times 10 = 16.69$$

$$CLS = C_4\,\sigma = 0.9727 \times 10 = 9.727$$

$$LCLS = B_5\sigma = 0.276 \times 10 = 2.76$$

۳۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{R}=\frac{200}{50}=4$$
$$\bar{\bar{X}}=\frac{\sum \bar{X}_i}{50}=\frac{2000}{50}=40 \qquad \hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}=\frac{4}{2.534}=1.579$$
$$P_{\text{دورریز}}=P\{X<LSL\}=P(X<36)=\varphi\left(\frac{36-40}{1.579}\right)=\varphi(-2.533)=0.0057$$

۳۲ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\mu=3 \qquad n=4 \qquad \mu_1=92$$
$$K=\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma}=\frac{92-100}{6}=-1.33$$
$$P\ (\text{شناسایی تغییر در اولین نمونه})=1-P\ (\text{عدم شناسایی تغییر در اولین نمونه})=1-\beta=1-\left[\varphi\left(3-K\sqrt{n}\right)-\varphi\left(-3-K\sqrt{n}\right)\right]$$
$$=1-\left[\varphi\left(3-(-1.33)\sqrt{4}\right)-\varphi\left(-3-(-1.33)\sqrt{4}\right)\right]=1-\left[\varphi(5.66)-\varphi(-0.34)\right]$$
$$=1-[1-0.37]=0.37$$

۳۳ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\beta=P\left(LCL_{\bar{X}}\le\bar{X}\le UCL_{\bar{X}}\right)=P\left(\bar{X}\le UCL_{\bar{X}}\right)-P\left(\bar{X}\le LCL_{\bar{X}}\right)$$
$$=\varphi\left(\frac{104-98}{\frac{8}{\sqrt{5}}}\right)-\varphi\left(\frac{96-98}{\frac{8}{\sqrt{5}}}\right)=\varphi(1.68)-\varphi(-0.56)=0.6658$$
$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=\frac{1}{1-0.6658}=2.992$$

۳۴ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$UCL_{\overline{MR}}=D_4\overline{MR}=3.267(0.0377)=0.1232$$

۳۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}+\frac{3\overline{MR}}{d_2}=5.7566+3\frac{(0.0377)}{1.128}=5.85$$
$$CL\bar{X}=\bar{\bar{X}}=5.7566$$
$$LCL\bar{X}=\bar{\bar{X}}-\frac{3\overline{MR}}{d_2}=5.7566-3\left(\frac{0.0377}{1.128}\right)=5.65$$

Observations in Sample, n	Chart for Averages: Factors for Control Limits			Chart for Standard Deviations: Factors for Center Line		Factors for Control Limits				Chart for Ranges: Factors for Center Line		Factors for Control Limits				
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.04230	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

For $n > 25$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, \quad c_4 \simeq \frac{4(n-1)}{4n-3},$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

فصل سوم

نمودارهای کنترل برای وصفی‌ها

می‌دانیم اگر متغیری قابل اندازه‌گیری نباشد به آن کیفی می‌گویند یکی از روش‌های ارزیابی متغیرهای کیفی تقسیم آن‌ها به دو بخش مطلوب و نا مطوب (پیروزی و شکست) می‌باشد. در آمار توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای و پواسون و هندسی از توزیع‌هایی هستند که در مورد این متغیرها موضوعاتی را مطرح می‌کنند. معمولاً برای این متغیرها نسبت پیروزی‌ها یا تعداد پیروزی‌ها به عنوان شاخص شناخته می‌شوند به عنوان مثال تعداد قطعات معیوب ـ نسبت کالاهای خارج از استاندارد از این نوع متغیرها هستند.

۱ـ نمودار کنترل برای نسبت اقلام معیوب (P)

می‌دانیم اگر در یک جامعه برنولی معیوب بودن به عنوان پیروزی قلمداد شود p، احتمال معیوب بودن برابر نسبت اقلام معیوب جامعه به تعداد کل اقلام جامعه می‌باشد. لازم به ذکر است این‌که معیوب بودن یا سالم بودن را پیروزی در نظر بگیریم و نسبت آن را بررسی کنیم کاملاً قراردادی است و با بررسی یکی، دیگری مشخص می‌شود.

فرض کنید یک نمونه nتایی از این جامعه برنولی با پارامتر p گرفته شود یعنی $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} b(p)$

می‌دانیم بهترین برآورد p را به صورت $\hat{p}=\frac{X}{n}$ تعریف می‌کنیم که X تعداد پیروزی (معیوب) در نمونه n تایی است.

به $\hat{p}$ **نسبت اقلام معیوب نمونه** می‌گوییم.

می‌دانیم $X\sim b(n,p)$ یعنی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p می‌باشد. و

$$E(X)=np \quad , \quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=npq$$

در نتیجه

$$E(\hat{p})=\frac{np}{n}=p \quad , \quad \mathrm{Var}(\hat{p})=\frac{n(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

حال اگر p معلوم باشد می‌توانیم خط مرکزی و حدود کنترل نمودار p را به صورت زیر بنویسیم.

$$C.L=p=E(\hat{p})$$

$$UCL = E(\hat{p}) + k\sqrt{Var(\hat{p})} = p + k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = E(\hat{p}) - k\sqrt{Var(\hat{p})} = p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

که در آن k فاصله خط مرکزی از حدود کنترل است و معمولاً برابر 3 در نظر گرفته می‌شود.

به عبارت دیگر خط مرکزی و حدود کنترل نمودار p عبارتند از:

$$CL = p$$

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

پس از رسم این نمودار بایستی m بار نمونه n تایی بگیریم و در هر نمونه نسبت اقلام نمونه را به صورت $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n}$ برای $i = 1, 2, \cdots, m$ پیدا کنیم و هر یک از $\hat{p}_i$ را به عنوان نقطه‌ای در نمودار بالا رسم کنیم هر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل بوده وجود خطای با دلیل در آن نقطه بررسی می‌شود و اگر همه نقاط در حدود کنترل باشند و نقاط رسم شده از روند منظم غیرتصادفی برخوردار نباشند فرآیند را تحت کنترل می‌دانیم.

بدیهی است اگر p را ندانیم بایستی آن را برآورد کنیم. بهترین برآورد p در این شرایط عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mn}$$

پس از محاسبه $\bar{p}$ است در حدود کنترل p که قبلاً یافته‌ایم به‌جای p از $\bar{p}$ استفاده کنیم بنابراین حدود کنترل آزمایشی مورد نظر عبارتند از:

$$CL = \bar{p}$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

لازم به ذکر است اگر LCL منفی شد به دلیل آن‌که p بایستی مثبت باشد و LCL را برابر صفر می‌گیریم. این مطلب را برای نمودار قبلی هم رعایت می‌کنیم.

مثال: اعداد زیر تعداد اقلام معیوب را در $m = 25$ روز نمونه‌گیری $n = 300$ تایی از خط تولید یک کارخانه نشان می‌دهد. حدود کنترل آزمایشی را محاسبه و نقاط خارج از کنترل را مورد بررسی قرار دهید.

شماره نمونه	X_i	$\hat{p}_i$
۱۶	5	0.017
۱۷	7	0.021
۱۸	8	0.026
۱۹	16	0.053
۲۰	2	0.007

شماره نمونه	X_i	$\hat{p}_i$
۱	12	0.04
۲	3	0.01
۳	9	0.03
۴	4	0.013
۵	0	0

۶	6	0.02
۷	6	0.02
۸	1	0.003
۹	8	0.026
۱۰	11	0.036
۱۱	2	0.007
۱۲	10	0.033
۱۳	9	0.03
۱۴	3	0.01
۱۵	0	0

۲۱	5	0.017
۲۲	6	0.02
۲۳	0	0
۲۴	3	0.01
۲۵	2	0.006
جمع	$\sum X_i = 138$	-

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{mn} = \frac{138}{25(300)} = \frac{138}{7500} = 0.018$$

$$CL = \bar{p} = 0.018$$

$$UCL_p = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 + 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = 0.041$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 - 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = -0.005$$

که بایستی قرار دهیم $LCL = 0$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود زیر گروه شماره 19 دارای مقداری برای $\hat{p}$ است که بالاتر از UCL_p می‌باشد. با حذف این نمونه مجدداً حدود را حساب می‌کنیم.

$$\bar{P}_{new} = \frac{122}{7200} = 0.017$$

$$UCL_p = \bar{P}_{new} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}_{new}(1-\bar{P}_{new})}{n}} = 0.017 + 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = 0.039$$

$$LCL_p = \bar{P}_{new} - 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = -0.005$$

که LCL_p را صفر قرار می‌دهیم.

حال با این حدود کنترل همه نقاط داخل محدوده هستند.

تذکر: اگر تعداد نمونه زیر گروه‌ها برابر نباشد خط مرکزی عبارت است از:

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

که n_i تعداد نمونه زیرگروه i ام و $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n_i}$ برآورد نسبت معیوب‌ها در زیر گروه i ام می‌باشد.

حدود کنترل برای هر زیر گروه جداگانه حساب می‌شود.

$$UCL_i = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}}$$
$$LCL_i = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}}$$

لازم به ذکر است می‌توان این حدود را به سادگی حساب کرد چون تنها عامل متفاوت آن‌ها $\sqrt{n_i}$ در مخرج کسر می‌باشد.

نمودار زیر می‌تواند یک نوع از این زیرگروه‌ها را نشان دهد.

زیرگروه	n_i	$\hat{p}_i$
۱	180	0.15
۲	120	0.15
۳	142	0.14
۴	315	0.16
۵	162	0.14

تذکر: با توجه به آن‌که نموداری که با اندازه n_i های متفاوت رسم می‌شود از پیچیدگی برخوردار است و در بررسی و ارائه نتایج مشکلاتی به همراه دارد یکی از روش‌های رفع این مشکل این است که میانگین تعداد نمونه‌ها را برای زیرگروه‌ها و حدود کنترل در نظر بگیریم یعنی به‌جای n در روابط مربوط به حدود کنترل از

$$\overline{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$$

استفاده کنیم.

نکته: فرمول تعداد نمونه زیرگروه‌ها

می‌دانیم تعداد نمونه لازم برای آن‌که در سطح اطمینان $100(1-\alpha)\%$ حداکثر خطای برآورد $\hat{p}$ برابر e بشود عبارت است از:

$$n = \hat{p}\hat{q}\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{e}\right)^2$$

در بحث ما با توجه به آن‌که $Z_{\frac{\alpha}{2}} = K = 3$ در نظر گرفته می‌شود و میزان تغییرات $e = \hat{p} - p$ می‌باشد می‌توانیم بنویسیم.

$$n = pq\left(\frac{k}{e}\right)^2$$

که در آن k نشان‌دهنده استفاده از حدود k انحراف معیار e میزان تفاوت p از مقدار جدید آن می‌باشد و $q = 1-p$. در این حال وقتی $\hat{p} \approx N(np, npq)$ و نسبت معیوب در فرآیند خارج از کنترل $p = UCL$ در نظر گرفته شود احتمال $\hat{p} > UCL$ برابر 0.5 می‌شود.

به عنوان یک روش دیگر می‌توانیم n را طوری پیدا کنیم که $LCL > 0$ یعنی

$$p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} > 0$$

یا

$$n > \frac{1-p}{p} k^2$$

مثال: می‌خواهیم با حدود کنترل 3 انحراف معیار تعداد نمونه را طوری پیدا کنیم که وقتی $p = 0.054$ داشته با $LCL > 0$ چه تعداد نمونه لازم است؟

حل :
$$n > \frac{1-p}{p} K^2 = \frac{0.96}{0.04} p(3)^2 = 24(9) = 216$$

پس باید $n \ge 217$ نمونه در هر زیر گروه داشته باشیم.

تذکر: لازم به ذکر است وقتی p کوچک است بدیهی است در تعداد نمونه کم نمی‌توان معیوب مشاهده کرد یعنی باید وقتی p کوچک است آنقدر نمونه بگیریم که معیوبی را هم مشاهده نماییم.

۲ـ نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب

بعضی مواقع لازم است به‌جای پرداختن به نسبت اقلام معیوب تعداد اقلام معیوب را مورد بررسی قرار دهیم. نمودار مربوط به تعداد اقلام معیوب را np هم می‌گویند. برای یافتن روابط مربوط به این نمودار کافی است در روابط نمودار P عدد n را ضرب کنیم در این حال

$$CL_{np} = np$$
$$UCL_{np} = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$
$$LCL_{np} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

اگر p که نسبت اقلام معیوب جامعه است نامعلوم باشد. به‌جای آن از $\overline{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mn}$ استفاده می‌کنیم.

۳ـ نمودار کنترل برای تعداد نقص‌ها

کالای معیوب ممکن است دارای چندین اشکال جزیی باشد که آن‌ها را نقص می‌گوییم. نمودار قبلی تعداد اقلام و نسبت اقلام معیوب را در نظر می‌گرفت در حالی که ممکن است حتی کالای سالم دارای نقص جزئی باشد.

در این نمودار می‌خواهیم تعداد نقص‌ها را در نظر بگیریم. به عنوان مثال وجود خش در رنگ بدنه یک یخچال نقص حساب می‌شود.

فرض کنید تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی دارای توزیع پواسون باشد. واحد مورد بررسی می‌تواند یک زمان تولید ـ سطح یا حجم یک کالا یا چند کالا با هم باشد. می‌دانیم تابع احتمال تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی عبارت است از:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\cdots$$

که در آن $\lambda > 0$ با فرض معلوم بودن λ بدیهی است خط مرکزی و حدود کنترل به انحراف معیار عبارتند از:

$$CL = \lambda$$
$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$
$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}$$

با توجه به آن‌که تعداد نقص‌ها نمی‌تواند منفی باشد وقتی $LCL < 0$ آن را صفر در نظر می‌گیریم.

اگر λ معلوم نباشد یا مقدار استانداردی برای آن وجود نداشته باشد آن را با میانگین تعداد نقص‌ها در نمونه m تایی یعنی با $\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{m}$ برآورد می‌کنیم لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL = \bar{\lambda}$$
$$UCL = \bar{\lambda} + 3\sqrt{\bar{\lambda}}$$
$$LCL = \bar{\lambda} - 3\sqrt{\lambda}$$

مثال: فرض کنید اعداد زیر تعداد زنگ‌های موجود در یک توپ پارچه را در 25 نمونه نشان می‌دهد

تعدادزدگی	شماره نمونه	تعدادزدگی	شماره نمونه	تعدادزدگی	شماره نمونه
0	21	14	11	7	1
4	22	3	12	6	2
14	23	1	13	6	3
4	24	3	14	3	4
3	25	2	15	22	5
141	جمع	7	16	8	6
		5	17	6	7
		7	18	1	8
		2	19	0	9
		8	20	5	10

$$\bar{\lambda} = \frac{141}{25} = 5.64$$
$$UCL = 5.64 + 3\sqrt{5.64} = 12.76$$
$$LCL = 5.64 - 3\sqrt{5.64} < 0$$

پس $LCL = 0$

همان‌طور که مشهود است نمونه‌های شماره ۵ و ۱۱ و ۲۳ دارای تعداد نقص بیشتر از UCL هستند و باید حذف شوند پس از حذف آن‌ها حدود کنترل را مجدداً پیدا می‌کنیم.

$$\bar{\lambda}_{new} = \frac{141-(22+14+14)}{25-3} = 4.136$$
$$UCL_{new} = 4.136 + 3\sqrt{4.136} = 10.237$$
$$LCL_{new} = 4.136 - 3\sqrt{4.136} < 0$$

که $LCL_{new} = 0$

بنابراین در روابط اصلاح شده همه نمونه‌ها داخل حدود کنترل قرار دارند.

۴ـ نمودار متوسط تعداد نقص‌ها (نمودار U)

فرض می‌کنیم در هر بار نمونه‌گیری n واحد نمونه به عنوان زیرگروه در نظر می‌گیریم و λ تعداد کل نقص‌ها در زیر گروه باشد پس $U = \frac{\lambda}{n}$ متوسط تعداد نقص در هر واحد مورد بررسی است و بنابراین خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$CL = \bar{U}$$

$$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

$$LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

که در آن $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{m} U_i}{m}$ متوسط تعداد نقض‌ها در هر واحد برای کل نمونه‌هاست.

مثال: اعداد زیر تعداد اشکال‌های جزئی در رنگ بدنه یخچال‌ها را نشان می‌دهد. 2 بار نمونه‌گیری شده و در هر بار 5 یخچال را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

شماره نمونه	تعداد اشکال	متوسط تعداد اشکال	شماره نمونه	تعداد اشکال	متوسط تعداد اشکال
1	7	1.4	11	11	2.2
2	12	2.4	12	3	0.6
3	11	2.2	13	7	1.4
4	13	2.6	14	10	2
5	11	2.2	15	10	2
6	16	3.2	16	8	1.6
7	10	2	17	8	1.6
8	8	1.6	18	13	2.6
9	12	2.4	19	5	1
10	13	2.5	20	5	1
			جمع	193	38.6

بنابراین

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{m} U_i}{m} = \frac{38.6}{20} = 1.93$$

لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL = \bar{U} = 1.93$$

$$UCL = 1.93 + 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 3.79$$

$$LCL = 1.93 - 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 0.07$$

بدیهی است در همه نمونه‌ها U_i داخل حدود کنترل قرار دارد.

نکته: اگر اندازه زیرگروه‌ها یعنی n_iها برابر نباشند بایستی برای هر نمونه حدود کنترل مخصوص آن نمونه را یافت این نمودار قدری پیچیده شده محاسبات را مشکل می‌سازد برای رفع این مشکل دو راه‌حل پیشنهاد می‌شود.

الف) از متوسط تعداد نمونه‌ها $\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$ به عنوان مقدار برابر n استفاده می‌کنیم. در این حال یک حدود کنترل آزمایشی مانند قبل بوجود می‌آید

ب) آماره استانداردشده

$$Z_i = \frac{U_i - \bar{U}}{\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}}$$

را به‌کار می‌بریم که U_i متوسط تعداد نقص در نمونه iام متوسط تعداد نقص در هر واحد برای کل نمونه‌هاست. در این حال بایستی قرار دهیم $CL = 0$ و $UCL = +3$ و $LCL = -3$

تابع مشخصه عملکرد نمودار P

می‌دانیم تابع مشخصه عملکرد احتمال قبول فرض H_0 را نشان می‌دهد. احتمال قبول H_0 بر حسب p پیدا می‌شود یعنی منحنی OC تابعی از p است احتمال خطای نوع دوم که همان احتمال قبول H_0 به شرط نادرستی H_0 است می‌تواند احتمال ماندن در حدود کنترل آزمایشی را وقتی p تغییر کرده بیشتر شود.

$$\beta = P\left(LCL < \hat{p} < UCL|p\right)$$

$$= P\left(\hat{p} < UCL|p\right) - P\left(\hat{p} \le LCL|p\right) \quad (\hat{p} = \frac{X}{n} \text{ با توجه به تعریف})$$

$$= P\left(X < nUCL|p\right) - P\left(X \le nLCL|p\right)$$

که $X \sim b(n,p)$

برای محاسبه β بر حسب p از فرمول بالا کافی است تابع توزیع تجمعی دوجمله‌ای را برای p,n داشته باشیم. استفاده از $\bar{p}$ به‌جای p در روابط بالا اشکالی ندارد.

در مثال زیر جدول مربوط به محاسبه β را می‌توان دید.

حال می‌توانیم متوسط طول دنباله ARL (Average Run Length) را برای نسبت اقلام معیوب محاسبه نماییم. در واقع وقتی فرآیند واقعاً تحت کنترل باشد ARL متوسط تعداد نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه اشتباهاً خارج از کنترل رسم شود و وقتی فرآیند خارج از کنترل است ARL متوسط نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه به درستی خارج از کنترل رسم شود.

مثال: فرض کنید در یک فرآیند که برای نمونه‌های n=100 تایی از قطعات تولیدی یک کارخانه نسبت معیوب‌ها را بررسی می‌کند حدود کنترل آزمایشی به شرح زیر موجود است.

$$CL = 0.04 \quad , \quad UCL = 0.075 \quad , \quad LCL = 0.005$$

الف) احتمال خطای نوع دوم را به عنوان تابعی از p تشکیل دهید و برای 15 مقدار متفاوت p نمودار OC را رسم کنید.

حل :

$$\beta = P\left(\hat{p} < UCL \mid p\right) - P\left(\hat{p} \le LCL \mid p\right)$$

$$= P\left(X < nUCL\right) - P\left(X \le nLCL\right)$$

$$= P\left(X < 100(0.075)\right) - P\left(X \le 100(0.05)\right)$$

$$= P\left(X < 7.5\right) - P\left(X \le 0.5\right) = g(p)$$

برای محاسبه با توجه به آن‌که $X \sim b(n = 100, p)$ می‌توانیم برای

$$\lambda = np = 100p < 10$$

از تقریب پواسون و برای $np = 100p > 10$ از تقریب نرمال استفاده نماییم.

p	np	$P\{X<7.5 \mid np\}$	$P\{X\le 0.5 \mid np\}$	β
0	0	1.0000	1.0000	0.0000
0.005	0.5	1.0000	0.6065	0.3935
0.01	1	1.0000	0.3679	0.6321
0.03	3	0.9881	0.0498	0.9383
0.04	4	0.9489	0.0183	0.9306
0.06	6	0.7440	0.0025	0.7415
0.07	7	0.5987	0.0009	0.5978
0.08	8	0.4530	0.0003	0.4526
0.1	10	0.2202	0.0000	0.2202
0.125	12.5	0.0698	0.0000	0.0698
0.2	20	0.0008	0.0000	0.0008
0.25	25	0.0000	0.0000	0.0000

ب) احتمال خطای نوع اول چقدر است.

$\alpha = P(H_0$ رد $\left|H_0\right.$ درستی$) = P($نقطه خارج از حدود کنترل$\left|p=0.04\right.)$

$$=P\left(\hat{p}\le LCL \mid p=0.04\right)+P\left(\hat{p}\ge UCL \mid p=0.04\right)$$

$$=P\left(X\le 100\,LCL \mid p=0.04\right)+P\left(X\ge 100\,UCL \mid p=0.04\right)$$

که $X\sim b(100, p=0.04)$ و با توجه به $\lambda=np=4$ تقریب پواسون برای دوجمله‌ای مناسب می‌باشد لذا

$$\alpha=P\left(X\le 100(0.005)\right)+P\left(X\ge 100(0.075)\right)$$

که $X\sim P(\lambda=4)$ و بر اساس جدول پواسون

$$\alpha=P\left(X\le 0.5\right)+P\left(X\ge 7.5\right)$$

$$=P(X=0)+1-P(X\le 7)$$

$$=0.018+(1-0.948)=0.07$$

ج) احتمال خطای نوع دوم را برای $p=0.07$ حساب کنید.

$\beta = P(H_0$ قبول $\left|H_0\right.$ نادرستی$) = P($نقطه داخل حدود کنترل $\mid p=0.07)$

$$=P\left(\hat{p}<UCL \mid p=0.07\right)=P\left(\hat{p}\le LCL \mid p=0.005\right)$$

$$=P\left(X<100(0.075)\right)-P\left(X\le 100(0.005)\right)$$

$$=P(X<7.5)-P(X\le 0.5)$$

که $X\sim P(\lambda=7)$ و بنا به جدول

$$\beta=0.598-0=0.598$$

د) مقادیر ARL را برای دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرآیند پیدا کنید. در صورت خارج از کنترل بودن $p=0.07$ را در نظر بگیرید.

$$ARL=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{0.07}=14.29\approx 15\\[2mm] \dfrac{1}{1-\beta}=\dfrac{1}{1-0.598}=2.48\approx 3\end{cases}$$

یعنی در صورتی که نسبت معیوب‌ها به 0.07 افزایش یابد با سومین نقطه این مطلب مشخص می‌شود و اگر 15 نقطه رسم کنیم حتی وقتی نسبت واقعی معیوب‌ها 0.04 می‌باشد یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم می‌شود.

طبقه‌بندی نقص‌ها

یک نقطه سیاه روی رنگ در یک اتومبیل نقص است انحراف فرمان اتومبیل هم یک نقص است اما به وضوح تفاوت بسیار زیادی بین این دو نقص وجود دارد پس لازم است نقص‌ها از نظر اهمیت تقسیم‌بندی کنیم.

گروه A (بسیار مهم) نشان دهنده آن است که محصول برای استفاده مناسب نیست.

گروه B (مهم) نشان‌دهنده آن است که محصول دچار از کارافتادگی می‌شود و هزینه نسبت بالا دارد.

گروه C (با اهمیت متوسط) نشان‌دهنده نقصان عملکرد در حین کار است.

گروه D (با اهمیت کم) آن است که عملکرد دستگاه مشکلی ندارد اما در شکل ظاهری یا کارکرد خوب اشکال دارد.

این رده‌بندی توسط اچ اف داج H.F.Dodge در سال ۱۹۲۸ ارائه شده است.

با فرض آن‌که X_A, X_B, X_C, X_D تعداد نقص‌های گروه‌های چهارگانه فوق باشد $X = 100X_A + 50X_B + 10X_C + X_D$ تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی را اندازه می‌گیرد و وزن‌های مطر شده به صورت تجربی معمولاً به‌کار می‌رود اما در صورت نیاز به استفاده از وزن‌های دیگر با توجه به شرایط بوجود آمده اشکالی ندارد.

در صورت وزن‌دهی بالا می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$U = \frac{X}{n} \rightarrow \bar{U} = 100\bar{U}_A + 50\bar{U}_B + 10\bar{U}_C + \bar{U}_D$$

$$U = \frac{(100)^2\,\bar{U}_A + (50)^2\,\bar{U}_B + (10)^2\,\bar{U}_C + \bar{U}_D}{n}$$

و لذا خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$C.L = \bar{U}$$
$$UCL = \bar{U} + 3\hat{\sigma}_u$$
$$LCL = \bar{U} - 3\hat{\sigma}_u$$

تابع مشخصه عملکرد نمودارهای U, C

در نمودار C احتمال خطای نوع دوم برابر است با:

$$\beta = P\left(X < UCL \mid C\right) - P\left(X \le LCL \mid C\right)$$

که در آن X دارای توزیع پواسون با پارامتر C است.

و در نمودار U احتمال خطای نوع دوم عبارت است از:

$$\beta = \left(P\left(LCL < \frac{C}{n}\right)UC \mid UL\right)$$
$$= P\left(nLCL < C \le nUCL \mid U\right)$$
$$= \sum_{[nLCL]+1}^{[nUCL]} \frac{e^{-nu}\,(nu)^c}{c!}$$

که در آن $[nUCL]$ جزء صحیح nUCL است.

مثال: فرض کنید 30 بار نمونه 400 تایی گرفته‌ایم و جمعاً 1200 قلم معیوب مشاهده کرده‌ایم و اگر بدانیم نسبت معیوب‌ها به 0.2 تغییر یافته است الف) احتمال آن‌که این تغییر به وسیله اولین نمونه بعد از ایجاد آن کشف شود چقدر است.

ب) طول دنباله موردنیاز برای پی بردن به این تغییر را بیابید.

حل : الف) بر اساس اطلاعات داده شده

$$\bar{p}=\sum_{i=1}^{m}\frac{X_i}{mn}=\frac{1200}{30(400)}=0.1 \quad , \quad n\bar{p}=400(0.1)=40$$

$$UCL_{np}=n\bar{p}+3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}=40+3\sqrt{40(1-0.1)}=58$$

$$LCL_{np}=n\bar{p}-3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}=40-3\sqrt{40(1-0.1)}=22$$

حال

$$\text{توان}=1-\beta=P\ (\text{کشف تغییر در اولین نمونه})=1-P(LCL<X<UCL\,|\,p=0.2)$$

$$=1-P(X<UCL\,|\,p=0.2)+P(X\le LCL\,|\,p=0.2)$$

که

$X\sim b(n=400,P=0.2)$ با توجه به آن‌که $np=80>10$

تقریب نرمال با تصحیح پیوستگی مناسب می‌باشد.

$$1-\beta=1-\Phi\left(\frac{58+0.5-80}{\sqrt{80(0.8)}}\right)+\Phi\left(\frac{22-0.5-80}{\sqrt{80(0.8)}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{-21.5}{8}\right)+\Phi\left(\frac{-58.5}{8}\right)$$

$$=1-\Phi(-2.69)+\Phi(-7.31)$$

$$1-\Phi(-2.69)=\Phi(2.69)=0.99158$$

حل : ب)

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=\frac{1}{0.99158}\approx 1$$

مثال: می‌خواهیم یک نمودار کنترل با خط مرکزی 0.02 و حدود کنترل 2.5 انحراف معیار رسم کنیم طوری که حد پایین کنترل (LCL) مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

حل :

$$P=0.02 \quad , \quad K=2.5$$

$$n>\frac{1-p}{p}K^2 \rightarrow n>\frac{0.98}{0.02}(2.5)^2=306.25$$

پس

$$n\ge 307$$

مثال: در مثال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.045 تغییر پیدا کند و بخواهیم با احتمال 50% به این رخداد پی ببریم چه تعداد نمونه لازم است؟

حل : با توجه به فرمول زیر داریم.

$$n=\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p)=\left(\frac{2.5}{0.025}\right)^2(0.2)(0.98)=196$$

زیرا

$$\delta=\hat{p}-p=0.045-0.02=0.025$$

مثال: فرض کنید در یک فرایند تولیدی نمونه‌های 100تایی گرفته‌ایم و خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب $CL = 0.03$ بوده است. اگر 10 نمونه 100 تایی جدید به صورت زیر گرفته باشیم آیا فرآیند تحت کنترل آماری می‌باشد؟

شماره نمونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعداد معیوب	4	7	6	3	0	5	2	4	7	7

حل : کافی است $H_0 : p_1 = p_2$ را در برابر $H_1 = p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم که p_1 نسبت اقلام معیوب جدید و p_2 همان نسبت اقلام معیوب قبلی است که برآورد آن برابر 0.03 در نظر گرفته می‌شود پس $\hat{p}_1 = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = \frac{35}{10(100)} = 0.035$

$\hat{p}_2 = 0.03$

$$\text{نسبت آمیخته}\ \hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100(0.035)+100(0.03)}{200} = \frac{3.5+3}{200} = \sqrt{0.0325}$$

حال بر اساس آماره آزمون نرمال داریم $0035 - 0.03$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.035-0.03}{\sqrt{(0.0325)(0.9675)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}} = 0.2$$

که چون $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ یعنی $0.2 \not> Z_{0.025} = 1.96$ پس H_0 رد نمی‌شود و فرآیند هنوز تحت کنترل می‌باشد یعنی نسبت اقلام معیوب در سطح $\alpha = 0.05$ تغییر نکرده است.

مثال: فرض کنید در یک کارخانه هر بار 3 یخچال را به عنوان نمونه در نظر گرفته تعداد نقص‌ها را می‌شماریم. اگر متوسط تعداد نقص در هر یخچال وقتی فرآیند تحت کنترل است برابر 3 برآورد شود احتمال خطای نوع اول کدام است؟

$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12$

حل : می‌دانیم $\bar{C} = n\bar{U} = 3(3) = 9$ و لذا
$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12$$
$$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} < 0$$

$\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درستی})$

$= P(X < LCL \mid \lambda = 10) + P(X \geq UCL \mid \lambda = 10)$

$= P(X < 0 \mid \lambda = 10) + 1 - p(X \leq 11 \mid \lambda = 10)$

$= 0 + 1 - 0.696 = 0.304$

تست‌ها

۱ـ فرض کنید اعداد زیر تعداد بخاری‌های نمونه گرفته شده و خراب را در 10 روز نشان می‌دهد.

روز	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	جمع
تعداد نمونه n_i	80	110	90	75	130	120	70	125	105	95	1000
تعداد خراب X_i	4	7	5	8	6	6	4	5	8	7	60

حد کنترل بالایی برای نسبت اقلام معیوب بر اساس متوسط تعداد نمونه‌ها کدام است؟

۱) 0.13　　۲) 0.024　　۳) 0.074　　۴) 0.123

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{p}=\frac{\sum X_i}{\sum n_i}=\frac{60}{1000}=0.06 \quad , \quad \bar{n}=\frac{\sum n_i}{m}=\frac{1000}{10}=100$$

$$UCL=\bar{p}+3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}}=0.06+3\sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{100}}=0.132$$

۲ـ یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی در نمونه‌های 50 تایی برابر 0.04 نشان می‌دهد اگر نسبت اقلام معیوب بـه 0.07 تغییر پیدا کند احتمال آن‌که روز بعد به‌وجود این تغییر پی برده شود کدام است؟

۱) 0.066　　۲) 0.096　　۳) 0.934　　۴) 0.904

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}=0.04 \quad , \quad UCL=0.04+3\sqrt{\frac{(0.04)(0.96)}{50}}=0.135$$

$$LCL=0$$

$1-\beta=p$ (وقوع تغییر | کشف تغییر در اولین نمونه)

$$=p\left(X>50(0.135)\middle|p=0.07\right)+p\left(X\le 0\,|\,p=0.07\right)$$

با توجه به تقریب پواسون برای دوجمله‌ای

$$=1-P\left(X\le 6.75\middle|np=\lambda=3.5\right)+p\left(X\le 0\,|\,\lambda=3.5\right)$$

$$=1-0.934+0.03=0.066+0.03=0.096$$

۳ـ در یک نمودار کنترل با مقدار np=16 برای تعداد قطعات معیوب تولیدی توسط یک کارخانه در نمونـه‌هـای 400 تـایی بررسـی می‌شود اگر میانگین فرآیند به np=20 تغییر یابد احتمال پی بردن به این تغییر حداقل تا پایان روز سوم کدام است؟

۱) 0.983　　۲) 0.967　　۳) 0.976　　۴) 0.0170

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$np=16 \quad , \quad n=400 \quad \rightarrow \quad \bar{p}=\frac{16}{400}=0.04$$

$$UCL=np+3\sqrt{np(1-\bar{p})}=16+3\sqrt{16(1-0.04)}=27.758\cong 28$$

$$LCL=np-3\sqrt{np(1-\bar{p})}=16-3\sqrt{16(1-0.04)}=16-11.758=4.242\cong 4$$

با توجه به تقریب نرمال $1-\beta=p(X>UCL)+p(X<LCL)$

$$1-\Phi\left(\frac{28+\frac{1}{2}-20}{\sqrt{20(0.8)}}\right)+\Phi\left(\frac{4-\frac{1}{2}-20}{\sqrt{20(0.8)}}\right)$$
$$=1-\Phi(2.12)=1-0.983=0.017$$

حال

p (شناسایی حداقل در سومین نمونه)=[p(عدم شناسایی) $]^2$
$$=(0.983)^2=0.967$$

۴ـ در سوال قبل تعداد نمونه حداقل چه باشد تا حد کنترل پایین نمودار با حدود کنترل 3.5 انحراف معیار مثبت بماند؟

۱) 74 ۲) 48 ۳) 64 ۴) 65

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$n>\left(\frac{1-p}{p}\right)L^2=\frac{1-0.16}{0.16}(3.5)^2=64.313$$

پس $n\geq 65$

۵ـ در یک فرآیند خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب p=0.014 بوده است اگر بخواهیم حدود کنترل 2.5 انحراف معیار را طوری به‌کار ببریم که حد پایین نمودار کنترل مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

۱) 400 ۲) 360 ۳) 441 ۴) 280

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$n>\frac{1-p}{p}L^2=\frac{1-0.014}{0.014}(3.5)^2=440.1\approx 441$$

۶ـ در سوال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.024 تغییر یابد چه تعداد نمونه لازم است تا بتوان با احتمال $\frac{1}{2}$ به وجود تغییر پی برد؟

۱) 800 ۲) 863 ۳) 470 ۴) 629

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$n=\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p)=\left(\frac{2.5}{0.01}\right)^2(0.014)(0.986)=862.75\simeq 863$$
$$\delta=0.024-0.014=0.1=0.01$$

۷ـ اگر احتمال پی بردن به یک تغییر در اولین نمونه پس از ایجاد آن در نمودار کنترل p برابر 0.15 باشد احتمال آن‌که این تغییر حداقل در نمونه چهارم مشاهده شود کدام است؟

۱) $(0.85)^3$ ۲) $(0.85)^4$ ۳) $(0.85)^2(0.815)$ ۴) $(0.85)^3(0.815)$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

بر اساس روابط توزیع هندسی

$$P(X\geq 4)=q^3=(0.85)^3 \qquad q=1-0.15=0.85$$

که X تعداد نمونه لازم برای یافتن تغییر و دارای توزیع هندسی با پارامتر p=0.15 است.

۸ـ فرض کنید با نمونه‌های 100 تایی حدود کنترل و خط مرکزی نمودار نسبت اقلام معیوب را به صورت زیر یافته‌ایم.

$CL = 0.1 \quad , \quad UCL = 0.19$

$LCL = 0.01$

احتمال خطای نوع اول کدام است؟

۱) 0.05 ۲) 0.08 ۳) 0.005 ۴) 0.008

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$\alpha = p\ (\text{خطای نوع اول}) = P\left(X \le LCL \middle| p = 0.1\right) + P\left(X \ge UCL \middle| p = 0.1\right)$

با توجه به تقریب دوجمله‌ای به پواسون داریم $\lambda = np = 10$ و لذا

$\alpha = p\left(X \le 100(0.01)\right) + P\left(X \ge 100(0.19)\right)$

با استفاده از جدول پواسون

$= 0 + 1 - 0.992 = 0.008$

۹ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع دوم بازای p=0.020 کدام است؟

۱) 0.18 ۲) 0.381 ۳) 0.138 ۴) 0.008

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$= P\left(X < 100(0.19) \middle| \lambda = 20\right) - P\left(X \le 100(0.01) \middle| \lambda = 20\right)$

$= P\left(X < 19 \middle| \lambda = 20\right) - P\left(X \le 1 \middle| \lambda = 20\right)$

$= P\left(X \le 18 \middle| \lambda = 20\right) - P\left(X \le 1 \middle| \lambda = 20\right) = 0.381$

۱۰ـ اگر در یک فرآیند نسبت اقلام معیوب وجود یک تغییر در p با احتمال 0.217 در اولین نمونه پس از وقوع تغییر کشف شود به صورت متوسط چه مقدار نمونه n تایی باید گرفت؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$ARL = \dfrac{1}{1-\beta} = \dfrac{1}{0.217} = 4.6 \approx 5$

۱۱ـ اگر در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب داشته باشیم

$UCL = 0.0862 \quad , \quad LCL = 0.0138 \quad , \quad n = 100$

فاصله حدود کنترل چه ضریبی از انحراف معیار $\bar{p}$ می‌باشد؟

۱) 4.5 ۲) 3.3 ۳) 2.5 ۴) 3

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$UCL - LCL = 0.0862 - 0.0138 = 0.0724$

$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\dfrac{(0.05)(0.95)}{100}} = 0.0218$

حال

$\dfrac{0.0724}{0.0318} = 3.32$

۱۲ـ اگر حدود کنترل بالا و پایین نمودار نسبت اقلام معیوب به صورت LCL=0.031 , LCL=0.049 باشد احتمال خطای نوع اول بر اساس تعداد اقلام معیوب در نمونه‌های 100 تایی به چه فرمی است؟

۱) $P(X<3|p=0.04)$

۲) $P(X\le 3|p=0.04)+P(X>5|p=0.04)$

۳) $P(X\le 3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$

۴) $P(X<3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$\alpha = P(X\le 100\,LCL|p=CL=0.04)$$
$$+P(X\ge 100\,UCL|p=0.04)$$
$$=P(X\le 3.1|p=0.04)+P(X\ge 4.9|p=0.04)$$
$$=P(X\le 3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$$

۱۳ـ فرض کنید خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب CL=0.03 باشد و با احتمال 0.002 علی‌رغم آن‌که فرآیند تحت کنترل است ما فرآیند را خارج از کنترل اعلام می‌کنیم چه تعداد نمونه n=160 تایی لازم است گرفته شود تا فرآیند تحت کنترل را خارج از کنترل اعلام کنیم.

۱) 160 ۲) 32 ۳) 500 ۴) ۳۲۰

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$ARL=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{0.002}=\frac{100}{2}=500$$

۱۴ـ تعداد کل کلیدهای معیوب در 20 بار نمونه‌گیری 100 تایی 117 عدد می‌باشد حد بالای نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب کدام گزینه است؟

۱) ۰،۱۲۸۹ ۲) 0.0585 ۳) 0 ۴) 0.0289

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$n=100 \quad , \quad m=20 \quad \sum_{i=1}^{m} D_i=117 \qquad \bar{P}=\frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{mn}=\frac{117}{20(100)}=0.0585$$

$$UCL_p=\bar{P}+3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}=0.0585+3\sqrt{\frac{0.0585(1-0.0585)}{100}}=0.1289$$

۱۵ـ در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی برابر 0.02 است، اگر نسبت اقلام معیوب فرآیند به 0.04 تغییر پیدا کند آن‌گاه احتمال این‌که 2 روز بعد به‌وجود این تغییر پی برده شود کدام گزینه است؟ (نمونه‌های 90 تایی بازرسی می‌شوند)

۱) 0.3 ۲) 0.2 ۳) 0.145 ۴) 0.278

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}=0.02 \quad , \quad n=50$$

$$UCL=\bar{p}+3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}=0.02+3\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{50}}=0.0794$$

$$LCL=\bar{p}-3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}=0.02-3\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{50}}=0.02-0.0594 \quad \Rightarrow \quad 0$$

از آن‌جایی که P_{new} از 0.1 کوچکتر است و تعداد نمونه‌ها (50 تایی) به اندازه‌ی کافی بزرگ است از تقریب پواسون برای دوجمله‌ای استفاده می‌شود. $\lambda = nP_{new} = 50\times 0.04 = 0.2$

$$P(\text{شناسایی اولین نمونه}|P_{new}=0.04)=1-\beta=1-P\{LCL<\hat{P}<UCL|P_{new}=0.04\}$$
$$=1-P\{D<nUCL|\lambda\}+P\{D\le n\times LCL|\lambda\}=1-P\{D<3.97|2\}-P\{D\le 0|2\}$$
$$=1-0.857+0.135=0.278$$

شناسایی توسط دومین‌بار

$$P(\text{شناسایی توسط دومین نمونه})=(1-0.278)^1\times 0.278=0.2$$

۱۶ ـ مقدار نسبی اقلام معیوب در نمونه‌های 16 تایی برابر 0.2 می‌باشد که کوچکترین اندازه‌ی نمونه که باعث شود تا حد کنترل پایین نمودار مثبت باشد کدام گزینه است؟ (حدود کنترل 3σ است.)

۱) 16   ۲) 64   ۳) 36   ۴) 81

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$n>\frac{(1-p)}{p}L^2 \quad , \quad n>\frac{(1-0.2)}{0.2}(3)^2 \quad , \quad n>36$$

۱۷ ـ فرایندی توسط نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با حدود سه انحراف معیار، LCL=0 و CL=0.02 و UCL=0.0794 کنترل می‌شود حد بالای نمودار کنترل برای تعداد اقلام معیوب کدام گزینه است؟ (n=100 می‌باشد.)

۱) 6.2   ۲) -2.2   ۳) 2   ۴) 0

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$np=100(0.02)=2 \qquad 100\times 0.2=2$$
$$UCL=np+3\sqrt{np(1-p)}=2+3\sqrt{2\times(1-0.02)}=2+3\sqrt{2\times 0.98}=2+3\times 1.4=6.2$$

۱۸ ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.004   ۲) 0.005   ۳) 0.995   ۴) 0.996

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\lambda=np=2$$

چون p کوچک و n بزرگ است به توزیع پواسون تقریب می‌زنیم.

$$\alpha=1-p(D<UCL\,|\,\lambda=2)+p(D\le LCL\,|\,\lambda=2)$$
$$=P(D<0|\lambda=2)+1-P(D\le 6.2|\lambda=2)=0+1-POI(6\,,2)$$
$$=1-0.995=0.005$$

۱۹ ـ در سوال قبلی اگر نسبت اقلام معیوب به 0.2 تغییر کند با استفاده از تقریب مناسب احتمال خطای نوع II را تعیین کنید؟

۱) 0.05   ۲) 0.005   ۳) 0.0005   ۴) 0

حل : گزینه ۳ صحیح است.

چون $nP_{new}=100(0.2)=20$ بنابراین از تقریب نرمال برای دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\beta=P\{D<UCL|nP_{new}\}-P\{D\le LCL|nP_{new}\}$$

$$=\varphi\left(\frac{UCL+0.5-nP_{new}}{\sqrt{nP(1-p)}}\right)-\varphi\left(\frac{LCL-0.5-nP_{new}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$=\varphi\left(\frac{6.2+0.5-20}{\sqrt{20(1-,2)}}\right)-\varphi\left(\frac{0-0.5-20}{\sqrt{20(1-0.02)}}\right)=\varphi(-3.325)-\varphi(-5.125)=0.0005$$

۲۰ـ در طراحی یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با خط مرکزی P=0.3 و حدود کنترل سه انحراف معیار، چه اندازه نمونه موردنیاز است تا بتوان با احتمال 0.5 به وجود تغییر نسبت اقلام معیوب به 0.38 پی برد؟

۱) 296 ۲) 295 ۳) 400 ۴) 399

حل : گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از روش دانکن برای P(شناسایی)= 0.5

$$n=\left(\frac{k}{p_2-p_1}\right)^2\times p_1(1-p_1)=\left(\frac{3}{0.08}\right)^2\times 0.3(1-0.3)=295.3\simeq 296$$

۲۱ـ در فرآیندی متوسط نسبت اقلام معیوب 0.07 به‌دست آمده است و حدود کنترل 3 انحراف معیار برای آن در نظر گرفته شده است، در صورتی که نسبت اقلام معیوب به‌طور ناگهانی به 0.1 تغییر کند احتمال پی بردن به وجود تغییر به‌وسیله‌ی نمونه اول یا دوم بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟ (اندازه‌ی نمونه‌ها 400 می‌باشد)

۱) 0.53 ۲) 0.47 ۳) 0.27 ۴) 0.73

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$P(\text{شناسایی تغییر}|P_{new})=1-\beta=1-P(\hat{p}<UCL|P_{new})+P(\hat{p}\le LCL|P_{new})$$

$$=1-P(D<nUCL|nP_{new})+P(D\le LCL|nP_{new})$$

که چون $nP_{new}=400\times0.1=40>15$ بنابراین از تقریب نرمال برای Bin استفاده می‌کنیم.

$$=1-\varphi\left(\frac{nUCL-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)+\varphi\left(\frac{nLCL-np-0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$=1-\varphi\left(\frac{43.2-40+0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right)+\varphi\left(\frac{12.8-40-0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right)$$

$$=1-\varphi(0.62)+\varphi(-4.62)=1-0.72907+0=0.27$$

$$P(\text{شناسایی در اولین یا دومین نمونه})=0.27+(1-0.27)\times0.27=0.47$$

۲۲ـ در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب UCL=0.19 و CL=0.1 , LCL=0.01 برای کنترل فرآیندی استفاده می‌شود، اگر نسبت اقلام معیوب واقعی P=0.02 باشد آن‌گاه احتمال پی بردن به وجود تغییر حداقل به‌وسیله‌ی سومین نمونه بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟

۱) ۰٫۶۱۹ ۲) 0.381 ۳) 0.145 ۴) 0.383

حل : گزینه ۳ صحیح است.

از توزیع پواسون برای تقریب استفاده شده است.

$$\lambda=nP_{new}=100\times0.2=20$$

$$\beta = P(D<nUCL|\lambda)-P(D\le nLCL\,|\,\lambda)=P(D<100\times 0.19\,|\,20)-P(D\le 100\times 0.01\,|\,20)$$
$$=POI(18,20)-POI(1,20)=0.381$$
$$1-\beta=0.619$$
1-p(شناسایی به‌وسیله نمونه اول یا دوم) $=1-[0.619+0.619\times 0.381]=0.145$

۲۳ـ در سوال قبلی متوسط طول دنباله برای پی بردن به وجود این تغییر کدام گزینه است؟

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=\frac{1}{0.619}=1.61\simeq 2$$

۲۴ـ در تست ۲۲ قبلی متوسط طول دنباله موقعی که فرآیند تحت کنترل است و نسبت اقلام معیوب 0.1 می‌باشد کدام گزینه است؟

۱) 125　　۲) 13　　۳) 210　　۴) 120

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL=\frac{1}{\alpha}\quad,\quad \lambda=0.1\times 100=10$$
$$\alpha=1-P(D<nUCL\,|\,\lambda=10)+P(D\le nLCL\,|\,\lambda=10)$$
$$=1-P(D<100\times(0.19)\,|\,\lambda=10)+P(D\le 100\times(0.01)\,|\,\lambda=10)$$
$$=1-POI(18,10)+POI(1,10)=1-0.992+0=0.008$$
$$ARL=\frac{1}{0.008}=125$$

۲۵ـ یک فرآیند به‌وسیله نمودار نسبت اقلام معیوب کنترل می‌شود. اندازه نمونه 100 و خط مرکزی CL=0.01 است، نمونه‌های جدیدی به‌دست آمده که مجموع اقلام معیوب در 10 بار نمونه‌گیری با همان اندازه‌ی نمونه 28 می‌باشد مقدار آماره‌ی آزمون برای تحت کنترل بودن آن کدام گزینه است؟

۱) -18　　۲) -9　　۳) 18　　۴) -3

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}_1=0.01\quad,\quad n=100\quad,\quad \bar{p}_2=\frac{28}{1000}=0.028\quad,\quad n=100$$
$$\hat{p}=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}=\frac{100\times 0.01+100\times 0.028}{200}=0.019$$
$$Z_0=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{0.01-0.028}{\sqrt{0.019(1-0.019)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}}=\frac{-0.018}{0.02}\simeq -9$$

۲۶ـ مجموع تعداد نقص‌های مشاهده شده در 25 کیت الکترونیکی 225 می‌باشد حد بالای نمودار کنترل تعداد نقص‌ها کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 18　　۲) 0　　۳) 9　　۴) 36

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$CL = \overline{C} = \frac{225}{25} = 9$$
$$UCL = \overline{C} + 3\sqrt{\overline{C}} = 9 + 3 \times 3 = 18$$

۲۷ ـ می‌خواهیم فرآیند تولید یک ساعت الکتریکی را با استفاده از نمودار تعداد نقص‌ها کنترل کنیم. واحد بازرسی 1 ساعت است و در بررسی 100 ساعت الکتریکی 16 ساعت معیوب مشاهده گردید. حد بالای 3 انحراف معیار را برای این نمودار به‌دست آورید؟

۱) 1.3　　۲) 1.36　　۳) 0.64　　۴) 0.16

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum D_i = 16 \quad , \quad \overline{C} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$UCL_{\overline{c}} = \overline{C} + 3\sqrt{\overline{C}} = 0.16 + 3 \times 0.4 = 0.16 + 1.2 = 1.36$$
$$LCL_{\overline{c}} = \overline{C} - 3\sqrt{\overline{C}} = 0.16 - 3 \times 0.4 \quad \Rightarrow \quad 0$$

۲۸ ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) ۰،۰۰۴　　۲) 0.0128　　۳) 0.995　　۴) 0.005

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\alpha = P(D < LCL \mid C) + P(D \geq UCL \mid C) = P(D < 0 \mid C = 0.16) + 1$$
$$-P(D < UCL \mid C = 0.16) = 0 + 1 - POI(1, 0.16) = 1 - 0.9872 = 0.0128$$

از روش درون‌یابی $POI(1, 0.16)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda = 0.1 \quad POI = 0.995$$
$$\lambda = 0.2 \quad POI = 0.982$$
$$\frac{0.16 - 0.1}{0.1} = \frac{X - 0.995}{0.982 - 0.995}$$
$$0.1X = 0.06 \times (0.982 - 0.995) + 0.1 \times 0.995$$
$$X = 0.9872$$

۲۹ ـ اگر تعداد متوسط نقص‌های واقعی در سوال قبلی 1 باشد احتمال خطای نوع II کدام گزینه است؟

۱) 0.265　　۲) 0.735　　۳) 0.01　　۴) 0.99

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\beta = P(LCL < D < UCL \mid C = 1) = P(0 < D < 1.36 \mid C = 1)$$
$$= POI(1, 1) - POI(0, 1) = 0.735$$

۳۰ ـ اگر تعداد متوسط نقص‌ها واقعی در سوال قبلی 1 باشد، متوسط طول دنباله کدام گزینه است؟

۱) 3　　۲) 4　　۳) 2　　۴) 1

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.265} = 3.77 \simeq 4$$

۳۱ـ در صورتی که متوسط طول دنباله برای کشف تغییر در تعداد نقص‌ها برابر 4 باشد احتمال خطای نوع II برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.25 ۲) 0.1 ۳) 0.75 ۴) 0.9

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$ARL = 4 = \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad 1-\beta = 0.25 \quad , \quad \beta = 0.75$$

۳۲ـ در صورتی که متوسط طول دنباله برای موقعی که نمودار نسبت معیوب تحت کنترل است برابر 3 باشد احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.33 ۲) 0.77 ۳) 1 ۴) 0

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL = 3 = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{3} = 0.33$$

Appendix I

Cumulative poisson distribution[a]

x	λ 0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
0	0.990	0.951	0.904	0.818	0.740	0.670	0.606	0.548
1	0.999	0.998	0.995	0.982	0.963	0.938	0.909	0.878
2		0.999	0.999	0.998	0.996	0.992	0.985	0.976
3				0.999	0.999	0.999	0.998	0.996
4					0.999	0.999	0.999	0.999
5							0.999	0.999

x	λ 0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40
0	0.496	0.449	0.406	0.367	0.332	0.301	0.272	0.246
1	0.844	0.808	0.772	0.735	0.699	0.662	0.626	0.591
2	0.965	0.952	0.937	0.919	0.900	0.879	0.857	0.833
3	0.994	0.990	0.986	0.981	0.974	0.966	0.956	0.946
4	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.989	0.985
5	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
6		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
7				0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
8							0.999	0.999

x	λ 1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20
0	0.223	0.201	0.182	0.165	0.149	0.135	0.122	0.110
1	0.557	0.524	0.493	0.462	0.433	0.406	0.379	0.354
2	0.808	0.783	0.757	0.730	0.703	0.676	0.649	0.622
3	0.934	0.921	0.906	0.891	0.874	0.857	0.838	0.819
4	0.981	0.976	0.970	0.963	0.955	0.947	0.937	0.927
5	0.995	0.993	0.992	0.989	0.986	0.983	0.979	0.975
6	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994	0.992
7	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998
8	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
9			0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
10							0.999	0.999

[a] Entries in the table are values $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{c=0}^{x}(e^{-\lambda}\lambda^{c}/c!)$. Blank spaces below the last entry in any column may be read as 1.0; blank spaces above the first entry in any column may be read as 0.0.

Appendix I (Continued)

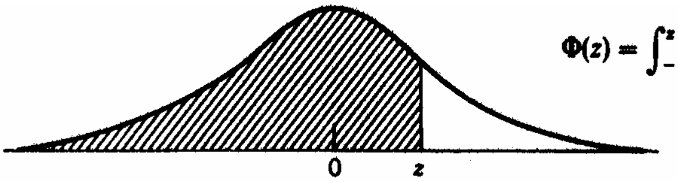
x	λ 2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
0	0.100	0.090	0.082	0.074	0.067	0.060	0.055	0.049
1	0.330	0.308	0.287	0.267	0.248	0.231	0.214	0.199
2	0.596	0.569	0.543	0.518	0.493	0.469	0.445	0.423
3	0.799	0.778	0.757	0.736	0.714	0.691	0.669	0.647
4	0.916	0.904	0.891	0.877	0.862	0.847	0.831	0.815
5	0.970	0.964	0.957	0.950	0.943	0.934	0.925	0.916
6	0.990	0.988	0.985	0.982	0.979	0.975	0.971	0.966
7	0.997	0.996	0.995	0.994	0.993	0.991	0.990	0.988
8	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998	0.997	0.996	0.996
9	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998
10	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
11			0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
12							0.999	0.999

x	λ 3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00
0	0.030	0.018	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000
1	0.135	0.091	0.061	0.040	0.026	0.017	0.011	0.007
2	0.320	0.238	0.173	0.124	0.088	0.061	0.043	0.029
3	0.536	0.433	0.342	0.265	0.201	0.151	0.111	0.081
4	0.725	0.628	0.532	0.440	0.357	0.285	0.223	0.172
5	0.857	0.785	0.702	0.615	0.528	0.445	0.369	0.300
6	0.934	0.889	0.831	0.762	0.686	0.606	0.526	0.449
7	0.973	0.948	0.913	0.866	0.809	0.743	0.672	0.598
8	0.990	0.978	0.959	0.931	0.894	0.847	0.791	0.729
9	0.996	0.991	0.982	0.968	0.946	0.916	0.877	0.830
10	0.998	0.997	0.993	0.986	0.974	0.957	0.933	0.901
11	0.999	0.999	0.997	0.994	0.989	0.979	0.966	0.946
12	0.999	0.999	0.999	0.997	0.995	0.991	0.983	0.973
13	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.996	0.992	0.987
14		0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994
15			0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997
16				0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
17					0.999	0.999	0.999	0.999
18						0.999	0.999	0.999
19							0.999	0.999
20								0.999

Appendix I (Continued)

				λ				
x	7.50	8.00	8.50	9.00	9.50	10.0	15.0	20.0
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.004	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.002	0.000	0.000
3	0.059	0.042	0.030	0.021	0.014	0.010	0.000	0.000
4	0.132	0.099	0.074	0.054	0.040	0.029	0.000	0.000
5	0.241	0.191	0.149	0.115	0.088	0.067	0.002	0.000
6	0.378	0.313	0.256	0.206	0.164	0.130	0.007	0.000
7	0.524	0.452	0.385	0.323	0.268	0.220	0.018	0.000
8	0.661	0.592	0.523	0.455	0.391	0.332	0.037	0.002
9	0.776	0.716	0.652	0.587	0.521	0.457	0.069	0.005
10	0.862	0.815	0.763	0.705	0.645	0.583	0.118	0.010
11	0.920	0.888	0.848	0.803	0.751	0.696	0.184	0.021
12	0.957	0.936	0.909	0.875	0.836	0.791	0.267	0.039
13	0.978	0.965	0.948	0.926	0.898	0.864	0.363	0.066
14	0.989	0.982	0.972	0.958	0.940	0.916	0.465	0.104
15	0.995	0.991	0.986	0.977	0.966	0.951	0.568	0.156
16	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982	0.972	0.664	0.221
17	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.985	0.748	0.297
18	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.992	0.819	0.381
19	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.996	0.875	0.470
20	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.917	0.559
21	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.946	0.643
22		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.967	0.720
23			0.999	0.999	0.999	0.999	0.980	0.787
24					0.999	0.999	0.988	0.843
25						0.999	0.993	0.887
26							0.996	0.922
27							0.998	0.947
28							0.999	0.965
29							0.999	0.978
30							0.999	0.986
31							0.999	0.991
32							0.999	0.995
33							0.999	0.997
34								0.998

Appendix II



$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.0
0.1	0.53983	0.54379	0.54776	0.55172	0.55567	0.1
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.2
0.3	0.61791	0.62172	0.62551	0.62930	0.63307	0.3
0.4	0.65542	0.65910	0.62276	0.66640	0.67003	0.4
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.5
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.6
0.7	0.75803	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79954	0.8
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.9
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	1.0
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87285	1.1
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	1.2
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	1.3
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	1.4
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	1.5
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	1.6
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	1.7
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	1.8
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	1.9
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	2.0
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	2.1
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	2.2
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	2.3
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	2.4
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	2.5
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	2.6
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	2.7
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	2.8
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	2.9
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	3.0
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	3.1
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	3.2
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	3.3
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	3.4
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	3.5
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	3.6
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	3.7
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	3.8
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	3.9

Appendix II (Continued)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586	0.0
0.1	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57534	0.1
0.2	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409	0.2
0.3	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173	0.3
0.4	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793	0.4
0.5	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240	0.5
0.6	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490	0.6
0.7	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78523	0.7
0.8	0.80234	0.80510	0.80785	0.81057	0.81327	0.8
0.9	0.82894	0.83147	0.83397	0.83646	0.83891	0.9
1.0	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214	1.0
1.1	0.87493	0.87697	0.87900	0.88100	0.88297	1.1
1.2	0.89435	0.89616	0.89796	0.89973	0.90147	1.2
1.3	0.91149	0.91308	0.91465	0.91621	0.91773	1.3
1.4	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189	1.4
1.5	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408	1.5
1.6	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448	1.6
1.7	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327	1.7
1.8	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062	1.8
1.9	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670	1.9
2.0	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169	2.0
2.1	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574	2.1
2.2	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899	2.2
2.3	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158	2.3
2.4	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361	2.4
2.5	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520	2.5
2.6	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643	2.6
2.7	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736	2.7
2.8	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807	2.8
2.9	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861	2.9
3.0	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900	3.0
3.1	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929	3.1
3.2	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950	3.2
3.3	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965	3.3
3.4	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976	3.4
3.5	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983	3.5
3.6	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989	3.6
3.7	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992	3.7
3.8	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995	3.8
3.9	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997	3.9

فصل چهارم

نمونه‌گیری برای پذیرش (acceptance sampling)

وقتی باید برای قبول یا رد یک محموله تصمیم بگیریم سه راه در مقابل ما قرار دارد.

الف) تصمیم بدون مشاهده   ب) بازرسی صددرصد تمام عناصر محموله

ج) نمونه‌گیری برای پذیرش

روش سوم که موضوع این فصل است به وضوح از دو روش دیگر منطقی‌تر می‌باشد این روش کنترل کیفیت تلقی نمی‌شود و یکی از اهداف آن ارزیابی محموله می‌باشد با توجه به ماهیت نمونه‌گیری تصمیم با این روش ممکن است خطاهایی ایجاد کند. یعنی محموله‌های رد شده ممکن است از لحاظ کیفیت از محموله‌های قبول شده بالاتر باشند.

روش تصمیم (الف) موقعی کاربرد دارد که آنقدر به تولیدات اطمینان داشته باشیم که هزینه بازرسی و نمونه‌گیری توجیه اقتصادی نداشته باشد.

روش تصمیم (ب) موقعی کاربرد دارد که محموله آنقدر مهم است که عدم شناسایی معیوب‌ها خسارت بسیار وارد می‌کند.

روش تصمیم (ج) در مواقعی کاربرد دارد که آزمایش مخرب و یا بازرسی 100% هزینه زیاد یا زمان طولانی به دنبال داشته باشد.

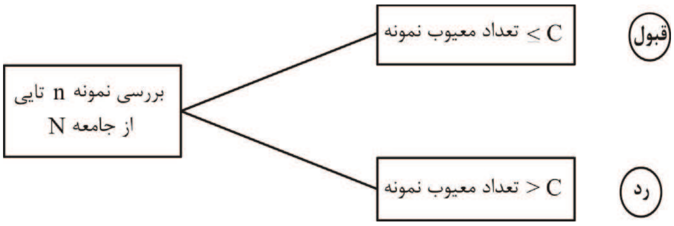
انواع طرح‌های نمونه‌گیری برای پذیرش

I. طرح‌های نمونه‌گیری برای پذیرش وصفی‌ها

در این طرح‌ها عناصر محموله‌ها غالباً به دو نوع سالم و معیوب یا بهتر بگوییم منطبق و نامطبق تقسیم می‌شوند. در ادامه چند نوع طرح را شرح می‌دهیم

I-a-طرح نمونه‌گیری یک مرحله‌ای

این طرح با یک سه‌تایی (N,n,c) شناخته می‌شود. طوری که از محموله N تایی تعداد n نمونه برمی‌داریم و اگر تعداد معیوب‌ها حداکثر c باشد محموله را پذیرفته و اگر تعداد معیوب‌ها از c بیشتر باشد محموله را رد می‌کنیم. به نمودار زیر توجه کنید.



منحنی OC طرح یک مرحله‌ای

می‌دانیم تابع مشخصه عملکرد احتمال پذیرش را به عنوان تابعی از θ (در این‌جا نسبت اقلام معیوب جامعه) نشان می‌دهد. نمودار این تابع به ما کمک می‌کند که احتمال رد یا قبول محموله‌ای را که نسبت اقلام معیوب خاصی دارد پیدا کنیم.

می‌دانیم اگر X تعداد اقلام معیوب نمونه n تایی باشد که از جامعه‌ای نامتناهی گرفته شده است (N را خیلی بزرگ در نظر می‌گیریم) آن‌گاه:

$$X \sim b(n,p)$$

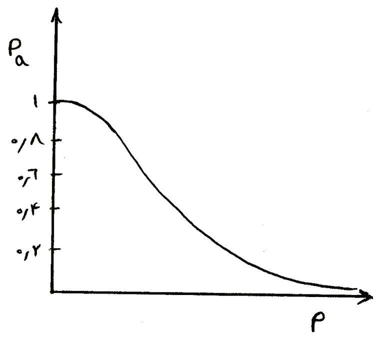
$$P(X=n)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

در این صورت احتمال پذیرش عبارت است از:

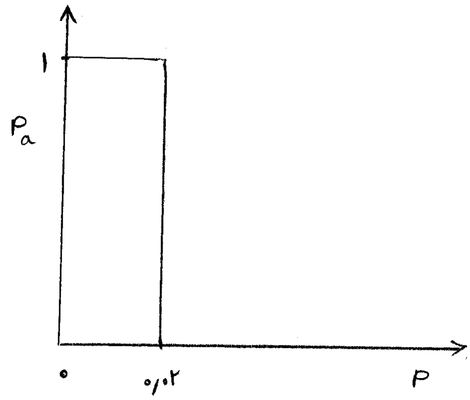
$$P_a = P(X \le C) = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

این تابع را می‌توان به عنوان تابعی از p در نظر گرفت یعنی n,c را معلوم فرض نموده P_a را بر حسب p رسم کنیم.

نمودار زیر به عنوان مثال یکی از این نمودارهای OC را نشان می‌دهد.



در حالت خاصی که با احتمال 1 تا وقتی p از حد مطلوب بیشتر نشده محموله را بپذیرد و وقتی p از حد مطلوب بیشتر شد با احتمال صفر آن را بپذیرد می‌گویند منحنی OC فرم ایده‌آل دارد مثلاً اگر نسبت معیوب‌ها در حالت مناسب و مطلوب 2% باشد نمودار OC ایده‌ال و به صورت زیر است.



البته این نمودار فقط وقتی $n = N$ می‌تواند رخ دهد یعنی بازرسی 100% انجام شود.

می‌توان دید هر چه n بزرگتر باشد شیب منحنی OC طوری افزایش می‌یابد که به حالت خاص ایده‌ال فوق نزدیک‌تر می‌گردد.

معرفی نقاط LTPD , AQL

(AQL (Acceptance Quality Level پایین‌ترین سطح کیفیت تامین کننده را که از دید مصرف‌کننده سطح متوسط کیفیت قابل قبول در نظر گرفته می‌شود نشان می‌دهد.

به AQL سطح کیفیت قابل قبول گفته می‌شود لازم به ذکر است

الف) AQL مشخصه فنی و یا مقدار هدف در فرآیند نمی‌باشد.

ب) AQL ربطی به طرح نمونه‌گیری ندارد و به فرآیند تولید بستگی دارد.

ج) AQL استانداردی است که برای ارزیابی محموله به‌کار می‌رود و امیدواریم سطح کیفیت خیلی بهتر از AQL باشد.

(LTPD (Lot Tolerance Percent Defective پایین‌ترین سطح کیفیت را نشان می‌دهد که مصرف‌کننده در یک محموله مجاز و قابل قبول می‌داند. LTPD را نسبت اقلام معیوب مجاز محموله می‌نامند و آن را با (RQL (Rejectable Quality Level به معنی سطح کیفیت قابل رد و (LQL (Limiting Quality Level به معنی سطح کیفیت حدی هم مترادف می‌دانند.

خواص الف و ب در مورد AQL برای LTPD هم مناسب می‌باشد و در مورد خاصیت (ج) باید گفت امید داریم سطح معیوب‌های محموله از LTPD کمتر باشد.

ریسک مصرف‌کننده و تولید کننده

در هر آزمون فرض H_1, H_0 فرضیه‌هایی هستند که مدعیان آن‌ها در مقابل هم قرار دارند یعنی منافع آن‌ها در تضاد است. در نمونه‌گیری برای پذیرش، هم تولیدکننده می‌خواهد تمام محموله‌های خوب قبول شوند و مصرف‌کننده نیز می‌خواهد تمام محموله‌های بد را رد کند. تنها در صورتی که بازرسی صد درصد انجام می‌شود محموله بد را با احتمال 1 رد و محموله‌های خوب را با احتمال یک پذیرش می‌کند.

برای تولید کننده و مصرف‌کننده دو مقدار شناخته شده و مهم وجود دارند.

دیسک تولیدکننده (Prouducer's risk)

احتمال رد کردن به ناحق یک محموله است. یعنی یک محموله خوب چقدر احتمال دارد رد شود. این احتمال را با α نشان می‌دهند و معمولاً عددی بین 0.01 تا 0.1 و غالباً 0.05 در نظر گرفته می‌شود. روی منحنی OC که احتمال قبول محموله است α را نمی‌توان نشان داد اما $1-\alpha$ را می‌توان نشان داد.

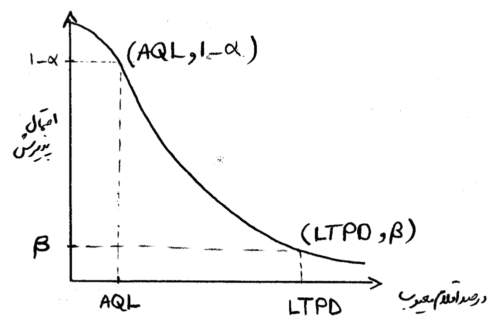
با توجه به تعریف AQL که حداکثر درصد اقلام معیوب رضایت‌بخش می‌باشد نقطه $(AQL,1-\alpha)$ یک نقطه روی نمودار OC می‌باشد.

ریسک مصرف‌کننده (Consumer's risk)

احتمال پذیرش به ناحق یک محموله می‌باشد یعنی احتمال آن است که محموله‌ای را که بد می‌باشد قبول کنیم. ریسک مصرف‌کننده را با β نشان می‌دهند که معمولاً آن را با 0.1 تعیین می‌کنند.

با توجه به تعریف LTPD درصد اقلام معیوب در محموله است که مصرف‌کننده می‌خواهد احتمال پذیرش آن کم باشد نقطه $(LTPD,\beta)$ یکی از نقاط نمودار OC است.

در واقع مصرف‌کننده به ناچار حاضر است با احتمال β محموله‌ای را که درصد معیوب آن LTPD است قبول کند به نمودار زیر در خصوص دو نقطه $(AQL,1-\alpha),(LTPD,\beta)$ توجه کنید.



همان‌طور که پیداست احتمال پذیرش AQL به مراتب بیشتر از احتمال پذیرش LTPD است.

در واقع محموله‌هایی که سطح کیفیت آن‌ها AQL باشند با احتمال $1-\alpha$ پذیرفته می‌شوند و محموله‌هایی که سطح کیفیت آن‌ها LTPD است با احتمال $1-\beta$ رد می‌شوند.

روش یافتن طرح نمونه‌گیری با ریسک تولیدکننده و مصرف‌کننده معین

فرض کنید نقطه $(AQL,1-\alpha)$ داده شده باشند. بر اساس تعریف می‌توان دسته‌ای از طرح‌ها یافت که از این نقطه عبور می‌کنند در جدول زیر بر اساس مقادیر مختلف C ستون‌هایی تشکیل شده‌اند. ستون اول $np^{-1}(0.95)$ است که $P^{-1}(0.95)$ نسبت اقلام معیوبی را که احتمال پذیرش آن 0.95 است بر حسب نشان می‌دهد.

ستون دوم $np^{-1}(0.1)$ می‌باشد که $p^{-1}(0.1)$ نسبت اقلام معیوبی که احتمال پذیرش آن 0.1 می‌باشد نشان می‌دهد.

حال با داشتن این ستون‌ها و تعریف AQL که نسبت اقلام معیوب با احتمال قبول محموله برابر 0.95 توسط تولیدکننده است، می‌توان n را یافت. کافی است؛

$$n=\frac{np^{-1}(0.95)}{p^{-1}(0.95)}$$

و در صورت استفاده از LTPD و داشتن نقطه $(LTPD,\beta)$

$$n=\frac{np^{-1}(0.1)}{p^{-1}(0.1)}$$

به عنوان مثال وقتی $\alpha=0.05$, $AQL=\%1.6$ یعنی $P^{-1}(0.95)=0.016$ یعنی با احتمال 0.95 محموله‌ای که 1.6% معیوب دارد را می‌پذیریم حال بر اساس جدول به عنوان نمونه و با در نظر گرفتن مقداری برای c داریم:

$$c=3\rightarrow n=\frac{np^{-1}(0.95)}{p^{-1}(0.95)}=\frac{1.366}{0.016}=85.37\approx 85$$

$$c=5\rightarrow n=\frac{np^{-1}(0.95)}{p^{-1}(0.95)}=\frac{2.63}{0.016}=164.3\approx 164$$

و یا وقتی $\beta=0.1$, $LTPD=\%8$ یعنی احتمال پذیرش محموله‌ای که نسبت اقلام معیوب آن 0.08 است، 0.1 باشد آن‌گاه به عنوان نمونه و با در نظر گرفتن مقداری برای c داریم:

$$c=2\rightarrow n=\frac{np^{-1}(0.1)}{p^{-1}(0.1)}=\frac{5.322}{0.08}=66.5\approx 67$$

$$c=4\rightarrow n=\frac{np^{-1}(0.1)}{p^{-1}(0.1)}=\frac{7.994}{0.08}=99.9\approx 100$$

منحنی‌های OC نوع A و نوع B

اگر در منحنی OC فرض شود تعداد اعضای جامعه بی‌نهایت است $(N=\infty)$ می‌گویند منحنی OC نوع B است اما اگر در منحنی OC فرض شود تعداد اعضای جامعه یعنی همان عناصر محموله متناهی هستند گویند منحنی OC از نوع A می‌باشد لازم به ذکر است در منحنی نوع A توزیع تعداد اقلام معیوب نمونه از توزیع فوق هندسی با پارامترهای N,n,a پیروی می‌کند که N تعداد اقلام محموله n تعداد نمونه‌ها و a تعداد اقلام معیوب موجود در محموله است. اما وقتی از منحنی نوع B استفاده می‌شود توزیع مقدار اقلام معیوب نمونه از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای p , n پیروی می‌کند که تعداد نمونه و p نسبت اقلام معیوب محموله است با توجه به تقریب توزیع فوق هندسی به دوجمله‌ای برای حالتی که $N\geq n$ این دو منحنی نوع B,A تقریبا بر هم منطبق می‌شوند. اما در غیر این صورت منحنی OC نوع A در زیر منحنی OC نو ع B قرار دارد.

روش یافتن C,n بر حسب α و β

فرض کنید در یک طرح نمونه‌گیری بخواهیم احتمال پذیرش محموله‌هایی که دارای نسبت اقلام معیوب p_1 هستند برابر $1-\alpha$ و احتمال پذیرش محموله که دارای نسبت اقلام معیوب p_2 هستند برابر β باشد با توجه به منحنی OC نوع B و برقراری توزیع دوجمله‌ای می‌توان اطلاعات داده شده را معلوم گرفته C,n را از دو معادله زیر پیدا کنیم.

$$1-\alpha=\sum_{x=0}^{c}\binom{n}{x}p_1^x(1-p_1)^{n-x}$$

$$\beta=\sum_{x=0}^{c}\binom{n}{x}p_2^x(1-p_2)^{n-x}$$

به $1-\alpha$ ریسک تولیدکننده و به β ریسک مصرف‌کننده هم می‌گویند معمولاً حل دستگاه بالا کار دشواری است که جواب آن را در جداولی به همین منظور تنظیم کرده‌اند در این جداول قرار می‌دهند $p_1 = AQL$,$p_2 = LTPD$.

معیار متوسط کیفیت خروجی AOQ (Average Outgoing Quality)

پس از نمونه‌گیری برای پذیرش محموله‌هایی را رد می‌کنیم و محموله‌هایی را نیز می‌پذیریم در مورد رد محموله‌ها یا آن‌ها را 100% بازرسی می‌کنیم یا کنترل‌های لازم را در تولید آن‌ها مورد توجه قرار می‌دهیم. به اقداماتی که در مورد محموله‌های رد شده انجام می‌دهیم بازرسی اصلاحی (Rectifying Inspection) گفته می‌شود.

در هر حال اقدامات ما در خصوص محموله‌های رد شده نسبت اقلام معیوب را از قبل آن کاهش می‌دهد. چون اگر فرض شود در مورد محموله‌های پذیرفته شده نسبت اقلام معیوب همان p_0 قبلی است پس از اقدامات اصلاحی p_1 نسبت اقلام معیوب جدید از p_0 کمتر است $(p_1 < p_0)$ اگر N نسبت به n بزرگ باشد می‌توان دید

$$p_1 = AOQ = p_a p_0$$

البته وقتی شرط بزرگی N نسبت به n برقرار نباشد

$$p_1 = AOQ = p_a p_0 \frac{N-n}{N}$$

p_a احتمال پذیرش بازای N, p_0 تعداد اقلام محموله و n تعداد نمونه گرفته شده است و p_1 متوسط کیفیت خروجی نسبت اقلام معیوب.

b-I طرح نمونه‌گیری دومرحله‌ای (جفت نمونه‌گیری)

این طرح با یک 5 تایی (N, n_1, c_1, c_2, n_2) شناخته می‌شود که N تعداد اقلام محموله - n_1 تعداد نمونه اولیه - C_1 عدد پذیرش نمونه اول - C_2 عدد پذیرش مجموع دو نمونه و n_2 تعداد نمونه ثانویه است.

به عنوان مثال وقتی $N = 20000, n_1 = 70, c_1 = 2, c_2 = 5, n_2 = 130$

از محموله نمونه‌ای $n_1 = 70$ تایی بر می‌داریم اگر تعداد اقلام معیوب از 2 کمتر یا مساوی بود محموله پذیرفته شده و اگر از 5 بیشتر بود محموله رد و اگر، $5 \le$ تعداد معیوب نمونه اول < 2، نمونه تصادفی $n_2 = 130$ تایی برداشته می‌شود اگر مجموع اقلام معیوب نمونه اول و دوم از 5 کمتر یا مساوی بود محموله قبول و اگر مجموع اقلام معیوب دو نمونه از 5 بیشتر بود محموله رد می‌شود.

نکته: احتمال پذیرش در طرح‌های جفت نمونه‌گیری عبارت است از:

$$P_a = P_a^{I} + P_a^{II}$$

که P_a^{I} و P_a^{II} احتمال پذیرش به‌وسیله نمونه‌های اول و دوم و P_a احتمال پذیرش با هر دو نمونه است. منحنی OC این طرح‌ها پیچیده می‌باشد در مثال بالا اگر X_1 تعداد معیوب نمونه اول هفتادتایی باشد وقتی نسبت اقلام معیوب نمونه اولیه $p = 0.05$ است

$$P_a^{I} = P(X_1 \le 2) = \sum_{x_1=0}^{2} \binom{70}{x_1} (0.05)^{x_1} (0.95)^{70-x_1}$$

حال نمونه دوم موقعی محموله را می‌پذیرد که مجموع تعداد اقلام معیوب دو نمونه از 5 کمتر باشد از آن‌جا که تعداد اقلام معیوب نمونه بین 3 تا 5 بوده است که تعداد نمونه گرفته شده است پس اگر X_2 تعداد معیوب نمونه دوم باشد.

$$P_a^{II}=P\left(X_1=3,X_2\le 2\right)+P\left(X_1=4,X_2\le 1\right)$$
$$+P\left(X_1=5,X_2=0\right)=\binom{70}{3}(0.05)^3(0.95)^{67}\cdot\sum_{x_2=0}^{2}\binom{130}{x_2}(0.05)^{x_2}(0.95)^{130-x_2}$$
$$+\binom{70}{4}(0.05)^4(0.95)^{66}\cdot\sum_{x=0}^{1}\binom{130}{x_2}(0.05)^{x_2}(0.95)^{130-x_2}$$
$$+\binom{70}{5}(0.05)^5(0.95)^{65}(0.95)^{130}$$

معیار متوسط کل بازرسی ATI (Average Total Inspection)

وقتی از محموله‌ای که دارای N قلم کالاست n قلم نمونه می‌گیریم سه حالت اتفاق می‌افتد

الف) $p_0=0$ پس معیوب مشاهده نمی‌شود و همه محموله‌ها قبول می‌شوند و فقط به‌اندازه n نمونه گرفته شده است.

ب) $p_0=1$ پس همه معیوب هستند لذا بایستی N قلم کالا مورد بازرسی قرار گیرد.

ج) $0<p_0<1$ پس تعداد متوسط بازرسی‌های لازم بین N,n است که از فرمول زیر حساب می‌شود.

$$ATI=n+\left(1-P_a\right)\left(N-n\right)$$

برای طرح جفت نمونه‌گیری فرمول ATI عبارت است از:

$$ATI=n_1P_a^I+\left(n_1+n_2\right)P_a^{II}+N\left(1-P_a\right)$$

که در صورت ساده شدن داریم:

$$ATI=n_1+n_2\left(1-P_a^I\right)+\left(N-n_1-n_2\right)\left(1-P_a\right)$$

از تقسیم ATI بر N متوسط کیفیت خروجی بازاء یک مقدار p' به صورت $AFI=\frac{ATI}{N}$ حساب می‌شود و لذا $AOQ=p'\left(1-AFT\right)$

$AFI\left(\text{Average Fraction Inspection}\right)$

مثال: اگر احتمال پذیرش برای نمونه 20 تایی ا زمحموله‌ای که 480 قلم کالا دارد برابر 0.84 باشد متوسط کل بازرسی چقدر است؟

حل :

$$ATI=n+\left(1-P_a\right)\left(N-n\right)$$
$$=20+(0.16)(460)=93.6$$

مثال: اگر احتمال پذیرش نمونه اول 0.37 و احتمال پذیرش در کل 0.85 باشد در طرح نمونه‌گیری جفت با $n_1=40,n_2=80,N=1000$ متوسط کل بازرسی چقدر است؟

حل :

$$ATI=40+80(1-0.37)+(1000-40-80)(1-0.85)=222.4$$

متوسط تعداد نمونه ASN (Average Sample Number)

در طرح‌های جفت نمونه‌گیری تعداد نمونه یک متغیر تصادفی است که مقدار n_1 یا n_1+n_2 را می‌گیرد. احتمال آن‌که فقط n_1 نمونه لازم باشد برابر احتمال آن است که در نمونه اول نتیجه‌گیری شود این احتمال را با P^* نشان می‌دهیم پس در این صورت با

احتمال $1-P^*$ نمونه اول کفایت نمی‌کند و باید نمونه دوم گرفته شود که در این صورت جمعاً n_1+n_2 نمونه گرفته‌ایم با توجه به $\begin{array}{c|cc} n & n_1 & n_1+n_2 \\ \hline & P^* & 1-P^* \end{array}$ و لذا امید ریاضی (متوسط) تعداد نمونه عبارت است از:

$$ASN = n_1P^* + \left(n_1+n_2\right)\left(1-P^*\right) = n_1 + n_2\left(1-P^*\right)$$

مثال: فرض کنید در طرح جفت نمونه‌گیری 80 نمونه گرفته‌ایم و در نمونه اولیه با احتمال 0.22 محموله رد و با احتمال 0.38 محموله پذیرش می‌شود. در صورت عدم نتیجه‌گیری رد یا قبول تعداد 120 نمونه دیگر می‌گیریم. متوسط تعداد نمونه این طرح چقدر است؟

حل :

$$ASN = n_1 + n_2\left(1-P^*\right)$$

که

$$P^* = 0.38 + 0.22 = 0.6$$

پس

$$ASN = 80 + 120\left(0.4\right) = 80 + 48 = 128$$

روش استفاده از جداول گرابز

فرض کنید وقتی نسبت اقلام معیوب p_1 است با احتمال $1-\alpha$ محموله را قبول و وقتی نسبت اقلام معیوب p_2 است با احتمال β محموله را قبول کنیم پس دو نقطه $(p_2,\beta),(p_1,1-\alpha)$ روی منحنی OC قرار دارند اگر علاوه بر فرض‌های فوق n_2 ضریبی از n_1 باشد می‌توان طرح جفت نمونه‌گیری را طراحی کرد. جداول زیر به جداول گرابز شهرت دارند.

شماره طرح	$R = P_2 / P_1$	اعداد پذیرش		مقادیر تقریبی برای Pn_1 برای	
		c_1	c_2	$P = ۰/۹۵$	$P = ۰/۱۰$
۱	۱۱/۹۰	۰	۱	۰/۲۱	۲/۵۰
۲	۷/۵۴	۱	۲	۰/۵۲	۳/۹۲
۳	۶/۷۹	۰	۲	۰/۴۳	۲/۹۶
۴	۵/۳۵	۱	۳	۰/۷۶	۴/۱۱
۵	۴/۶۵	۲	۴	۱/۱۶	۵/۳۹
۶	۴/۲۵	۱	۴	۱/۰۴	۴/۴۲
۷	۳/۸۸	۲	۵	۱/۴۳	۵/۵۵
۸	۳/۶۳	۳	۶	۱/۸۷	۶/۷۸
۹	۳/۳۸	۲	۶	۱/۷۲	۵/۸۲
۱۰	۳/۲۱	۳	۷	۲/۱۵	۶/۹۱
۱۱	۳/۰۹	۴	۸	۲/۶۲	۸/۱۰
۱۲	۲/۸۵	۴	۹	۲/۹۰	۸/۲۶
۱۳	۲/۶۰	۵	۱۱	۳/۶۸	۹/۵۶
۱۴	۲/۴۴	۵	۱۲	۴/۰۰	۹/۷۸
۱۵	۲/۳۲	۵	۱۳	۴/۳۵	۱۰/۰۸
۱۶	۲/۲۲	۵	۱۴	۴/۷۰	۱۰/۴۵
۱۷	۲/۱۲	۵	۱۶	۵/۳۹	۱۱/۴۱

شماره طرح	$R = P_2 / P_1$	اعداد پذیرش		مقادیر تقریبی برای Pn_1 برای	
		c_1	c_2	$P = ۰/۹۵$	$P = ۰/۱۰$
۱	۱۴/۵۰	۰	۱	۰/۱۶	۲/۳۲
۲	۸/۰۷	۰	۲	۰/۳۰	۲/۴۲
۳	۶/۴۸	۱	۳	۰/۶۰	۳/۸۹
۴	۵/۳۹	۰	۳	۰/۴۹	۲/۶۴
۵	۵/۰۹	۱	۴	۰/۷۷	۳/۹۲
۶	۴/۳۱	۰	۴	۰/۶۸	۲/۹۳
۷	۴/۱۹	۱	۵	۰/۹۶	۴/۰۲
۸	۳/۶۰	۱	۶	۱/۱۶	۴/۱۷
۹	۳/۲۶	۲	۸	۱/۶۸	۵/۴۷
۱۰	۲/۹۶	۳	۱۰	۲/۲۷	۶/۷۲
۱۱	۲/۷۷	۳	۱۱	۲/۴۶	۶/۸۲
۱۲	۲/۶۲	۴	۱۳	۳/۰۷	۸/۰۵
۱۳	۲/۴۶	۴	۱۴	۳/۲۹	۸/۱۱
۱۴	۲/۲۱	۳	۱۵	۳/۴۱	۷/۵۵
۱۵	۱/۹۷	۴	۲۰	۴/۷۵	۹/۳۵
۱۶	۱/۷۴	۶	۳۰	۷/۴۵	۱۲/۹۶

irmgn.ir

مثال: طرح جفت نمونه‌گیری با شرایط زیر طراحی کنید.

$p_1 = 0.02, \alpha = 0.05, p_2 = 0.084, \beta = 0.1, n_2 = n_1$

حل: با توجه به آن‌که $n_1 = n_2$ از جدول I استفاده می‌شود بنا به فرض می‌توان $R = \frac{p_2}{p_1} = \frac{0.084}{0.02} = 4.2$ را حساب کرد. در ستون R جدول نزدیک‌ترین عدد به 4.2 طرح شماره 6 می‌باشد که $C_2 = 4, C_1 = 1$ حال برای یافتن n_1 می‌توانیم از یکی از دو ستون انتهایی pn_1 استفاده کنیم در ستون اول $P_a = 1 - \alpha = 0.95$ و در واقع $\alpha = 0.05$ و در ستون دوم $\beta = 0.1$ می‌باشد.

حال بر اساس $\alpha = 0.05$ داریم:

$$n_1 = \frac{pn_1}{p_1} = \frac{1.04}{0.02} = 52$$

و لذا طرح موردنظر عبارت است از:

$$n_1 = 52\ ,\ C_1 = 1\ ,\ n_2 = 52\ ,\ C_2 = 4$$

اما اگر بر اساس $\beta = 0.1$ عمل کنیم داریم:

$$n_1 = \frac{pn_1}{p_2} = \frac{4.42}{0.084} = 52.6 \approx 53$$

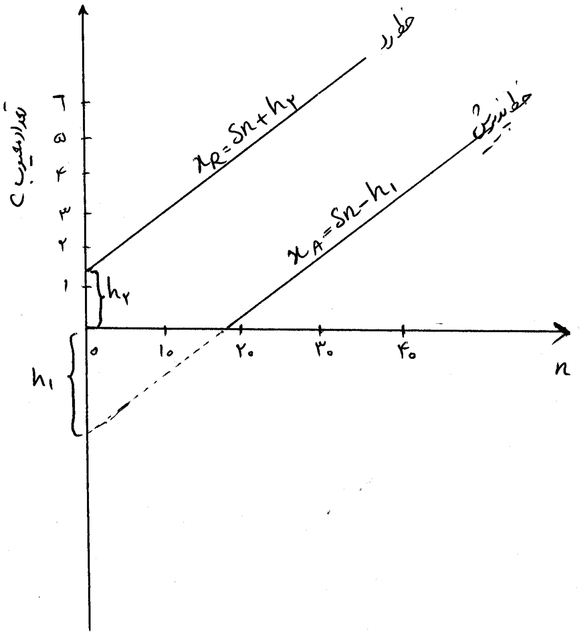
و لذا طرح موردنظر عبارت است از:

$$n_1 = 53\ ,\ C_1 = 1\ ,\ n_2 = 53\ ,\ C_2 = 4$$

که تفاوت چندانی با طرح قبلی ندارد.

طرح نمونه‌گیری دنباله‌ای (پی‌درپی)

در این طرح به صورت پی در پی نمونه‌گیری از محموله انجام می‌شود به طوری که تعداد اقلام بازرسی شده به 3 برابر تعداد اندازه نمونه‌ای برسد که در طرح یک‌بار نمونه‌گیری می‌توانست استفاده کرد. نمودار زیر می‌تواند به طور مناسبی این طرح را روشن کند.



مقادیر ثابت بر اساس p_2, p_1, β, α به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$h_1 = \frac{\log \frac{1-\alpha}{\beta}}{k}, \ h_2 = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{k}$$

$$k = \log \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}, \ S = \frac{\log \frac{1-p_1}{1-p_2}}{k}$$

می‌توان دید منحنی OC و ASN برای این طرح نمونه‌گیری پی در پی عبارت است از:

$$ASN = P_a\left(\frac{A}{C}\right) + (1-P_a)\frac{B}{C}$$

که

$$A = \log \frac{\beta}{1-\alpha} \quad , \quad B = \log \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$C = p\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)$$

لازم به ذکر است روابط زیر بر اساس معلوم بودن سه نقطه

$$(p_1, 1-\alpha)(p_2, \beta)\left(S, \frac{h_2}{h_1+h_2}\right)$$

پیدا شده‌اند.

استاندارد نظامی Military Standard (MIL STD) 105E

در زمان حال یکی از مهم‌ترین طرح‌های نمونه‌گیری برای پذیرش در مشخصه‌های وصفی استفاده از استاندارد MIL STD 105E می‌باشد. این استاندارد ویرایش چهارم استانداردی است که از جنگ جهانی دوم با عنوان MILSTD105A مطرح شده بود.

در این استاندارد سه نوع نمونه‌گیری امکان‌پذیر است.

الف) یک‌بار نمونه‌گیری

ب) جفت نمونه‌گیری

ج) چندبار نمونه‌گیری

برای هر نوع نمونه‌گیری سه روش بازرسی وجود دارد.

بازرسی نرمال	بازرسی تنگتر شده	بازرسی کاسته شده
Normal Inspection	Tightened Inspection	Reduced Inspection

با توجه به آن‌که کار کردن در روش بازرسی کاسته شده موقعی رخ می‌دهد که نسبت اقلام معیوب کاهش یافته، معمولاً اندازه نمونه در روش بازرسی کاسته شده از شرایط بازرسی نرمال کمتر می‌باشد. و روش تنگ‌تر شده یا سخت‌گیرانه وقتی رخ می‌دهد که نسبت اقلام معیوب افزایش یافته لذا اندازه نمونه در این روش از شرایط بازرسی نرمال بیشتر است.

این استاندارد بر پایه AQL (سطح کیفیت قابل قبول) طراحی شده است که این مقدار به صورت قراردادی و معمولاً برای نقص‌های اصلی برابر 1% و برای نقص‌های جزئی برابر 2.5% تعیین می‌گردد. در این استاندارد سه سطح بازرسی کلی به صورت زیر مطرح می‌گردد.

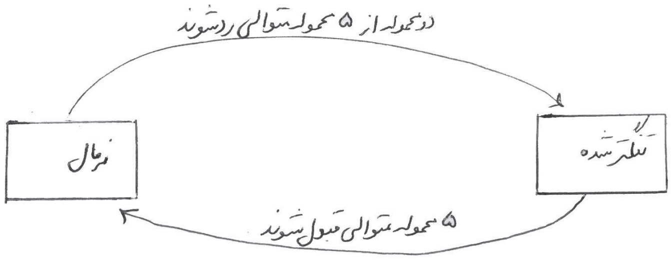
سطح I نصف بازرسی در سطح نرمال

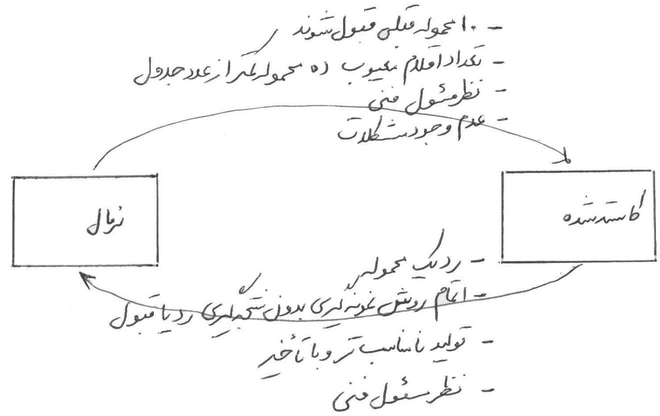
سطح II سطح بازرسی نرمال

سطح III دو برابر بازرسی در سطح نرمال

در این استاندارد 4 سطح بازرسی خاص هم وجود دارد که آن‌ها را با S_1, S_2, S_3, S_4 نشان می‌دهیم. با توجه به آن‌که این سطوح دارای تعداد نمونه کوچک هستند پس موقعی کاربرد دارند که تعداد نمونه کم ضرورت دارد و خطای زیادی قابل تحمل می‌باشد.

استفاده از این استاندارد یک طرح نمونه‌گیری نرمال را ارائه می‌دهد طوری که تا وقتی کیفیت محصولات در سطح AQL باشد استفاده از آن منطقی است اما برای تغییر روش از نرمال به کاسته شده و تنگتر شده دستورالعمل زیر مفید است.





ـ یک محموله رد شود

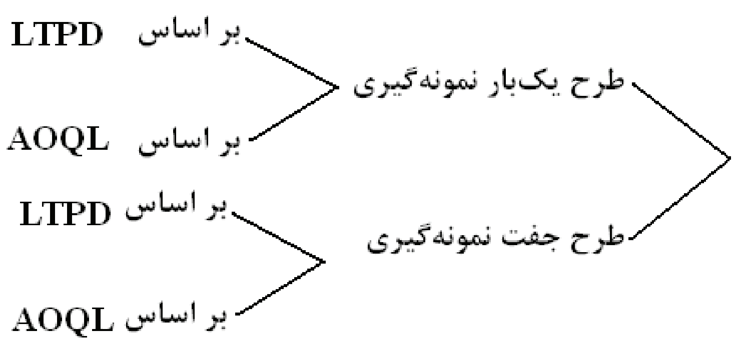
ـ انجام روش نمونه‌گیری بدون نتیجه‌گیری رد یا قبول

ـ تولید نامناسب و با تاخیر

ـ نظر مسئول فنی

طرح نمونه‌گیری داج ـ رومیگ

این دو نفر 4 نوع طرح نمونه‌گیری به شرح زیر ارائه کرده‌اند.



یکی از دلایل ضرورت استفاده از این طرح‌ها این است که وقتی به AQL توجه می‌کنید ممکن است احتمال عملکرد صحیح محصولات پیچیده را پایین بیاورد. مثلاً اگر یک محصول شامل 150 قطعه باشد که هر یک به وسیله فرآیندی که $AQL = \%0.2$ دارند تولید شود و محصول فقط زمانی درست عمل می‌کند که همه مشخصات به درستی عمل کنند آن‌گاه احتمال عملکرد صحیح محصول می‌شود $(0.998)^{150} = 0.74059$ که قابل قبول نیست پس باید طرح‌هایی که LTPD را تامین کنند. مانند طرح‌های داج رومیگ داشته باشیم.

چند نکته:

۱ـ در طرح‌های AOQL متوسط کل بازرسی بازای مقادیر خاصی از AOQL و متوسط کیفیت فرآیند p مینیموم می‌گردد.

۲ـ در طرح‌های LTPD متوسط کل بازرسی مینیمم می‌گردد.

۳ـ در این طرح‌ها متوسط اقلام معیوب محصولات ورودی باید مشخص باشد پس معمولاً در بازرسی‌های درون سازمانی مفید است زیرا در سازمان جدید نسبت اقلام معیوب معلوم نیست.

روش استفاده و تغییر نتیجه از طرح‌های داج و روسیگ

الف) وقتی $N = 4700$ و نسبت اقلام معیوب فرآیند تولیدکننده 0.84% باشد و $AOQL = \%2$ بر اساس جدول داریم $n = 125, C = 4$ و $LTPD = \%6.4$ یعنی در طرح نمونه‌گیری با $n = 125$ وقتی بیشتر از 4 معیوب مشاهده شود محموله رد گردد و طرح دارای $AOQL = \%3$ معیوبی است که این اطمینان را فراهم می‌کند که 90% محموله‌هایی ورودی که کیفیت آن‌ها از $\%6.4$ معیوب یا بدتر است رد شوند.

ب) وقتی $N = 6400$ و نسبت اقلام معیوب تولید کننده 0.16% باشد و $LTPD = \%1$ با استفاده از جدول داریم:

$n = 655 \qquad C = 3$

یعنی در این طرح وقتی 655 نمونه بگیریم و محموله را موقعی که تعداد معیوب از 3 بیشتر باشد رد کنیم اگر فرض شود محموله‌های رد شده مورد بازرسی و اقلام خوب جایگزین معیوب‌ها شوند آن‌گاه AOQL این طرح تقریباً 0.28% می‌باشد.

دستورالعمل استفاده از استاندارد MILSTD 105E

کافی است مراحل زیر را اجرا کنیم.

۱ـ سطح کیفیت قابل قبول AQL را انتخاب کنید.

۲ـ سطح بازرسی کلی (I,II,III) و خاص (S_1, S_2, S_3, S_4) را انتخاب کنید.

۳ـ تعداد اقلام محموله (N) را معین کنید.

۴ـ حرف کد اندازه نمونه را بر اساس اقلام مرحله دوم و سوم از جدول I استاندارد تعیین کنید.

۵ـ تعیین روش نمونه‌گیری مناسب از نظر یک مرحله‌ای یا جفت یا چند مرحله‌ای بودن

۶ـ یافتن جدول مناسب از میان جداول استاندارد

۷ـ تعیین طرح نمونه‌گیری از نظر نرمال ـ تنگ‌تر شده و کاسته شده

جداول مربوطه در انتهای فصل آورده می‌شوند.

نکته:

۱ـ وقتی روش بازرسی از نرمال به تنگ‌تر شده تغییر می‌کند اندازه نمونه ثابت می‌ماند ولی عدد پذیرش یک واحد کاهش می‌یابد. در حالت خاص که عدد پذیرش بازرسی نرمال 14,10,7,5 باشد میزان کاهش سه واحد خواهد بود.

۲ـ استاندارد MIL STD 105E وابسته به AQL است و به ریسک تولیدکننده توجه خاص دارد.

۳ـ از هر اندازه نمونه‌ای نمی‌توان استفاده کرد.

۴ـ n وابسته به N است.

۵ـ قوانین تغییر روش بازرسی از نرمال به تنگ‌تر شده و کاسته شده در این استاندارد ضروری است.

۶ـ معادل استاندارد غیرنظامی برای MIL STD 105E عبارت است از:

ANSI/ASQC Z1.4

این استاندارد در سال ۱۹۸۱ رسمیت یافته و دارای تفاوت‌های جزئی با استاندارد MIL STD است.

طرح نمونه‌گیری برای پذیرش متغیرها

اغلب طرح‌های نمونه‌گیری مربوط به مشخصه‌های وصفی می‌باشد. با این وجود لازم است آشنایی مختصری با طرح‌های مربوط به مشخصه‌های متغیر داشته باشیم. یکی از این طرح‌ها طرح شینین (Shainin Plan) می‌باشد که دارای مراحل زیر است.

۱ـ نمونه‌ای 50 تایی (ده زیر گروه 5 تایی) از محموله برداشته می‌شود.

۲ـ تعداد 5 قطعه از نمونه اولیه برداشته و بررسی می‌گردد و $R, \bar{X}$ آن‌ها حساب می‌شود.

۳ـ نمونه‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم طوری که $\bar{X}$ به‌دست آمده از بالا وسط دسته وسطی باشد. این عدد را به صفر و وسط دسته‌های بالایی را به ترتیب از $+1, +2, \cdots$ وسط دسته‌های پایینی را به ترتیب از $-1, -2, \cdots$ کدگذاری می‌کنیم.

۴ـ تعداد 50 نمونه را بر اساس شماره زیرگروه‌ها با توجه به مقادیر $\bar{X}$ ها در جدول قرار می‌دهیم.

۵ـ میانگین و جمع و دامنه تغییرات هر زیر گروه را حساب می‌کنیم.

۶ـ حدود بالا و پایین محموله را بر حسب اطلاعات زیرگروه‌ها به شرح زیر حساب می‌کنیم.

$$ULL = \bar{X} + \frac{3\bar{R}}{d_2} \quad , \quad LLL = \bar{X} - \frac{3\bar{R}}{d_2}$$

۷ـ هیستوگرام مربوط به داده‌ها رسم می‌شود و با توجه به LLL, ULL و ملاحظات دیگر توسط گروهی از کارشناسان تولید، تصمیم گرفته می‌شود.

تذکر: از ویژگی‌های این روش این است که برای توزیع نرمال و غیرنرمال کاربرد دارد و روش اجرایی آن ساده است.

طراحی یک طرح نمونه‌گیری برای متغیرها با منحنی OC معین

فرض کنید انحراف معیار جامعه نرمال مربوط به متغیرهای داده شده، معلوم باشد. می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا میانگین فرایند در مکانی که نسبت اقلام معیوب (p) قابل قبول باشد قرار دارد یا نه دو روش موسوم به روش M , K پیشنهاد می‌شود.

روش K: نمونه n تایی از محموله بردارید و آماره زیر را حساب کنید.

$$Z_{LSL} = \frac{\bar{X} - LSL}{\sigma}$$

هر چه LSL بزرگتر باشد p کمتر است و محموله قبول می‌شود وقتی $Z_{LSL} \geq k$

روش M نمونه n تایی از محموله بردارید و Z_{LSL} را حساب کنید. از $Q_{LSL} = \frac{Z_{LSL}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}$ به عنوان متغیر نرمال استاندارد استفاده کنید.

حال اگر $\hat{p}$ تخمین نسبت اقلام معیوب از عددی مثل M بیشتر شود محموله رد می‌شود.

۱ ـ AOQ عبارت است از ....

۱) سطح کیفیت قابل قبول
۲) مشخصه فنی محصول
۳) متوسط اندازه‌ی نمونه
۴) سطح کیفیت خروجی

حل : گزینه ۴ صحیح است.

۲ ـ کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

۱) احتمال خطای نوع II ریسک مصرف‌کننده می‌باشند.

۲) منحنی OC نوع A همواره پایین‌تر از منحنی OC نوع B قرار می‌گیرد.

۳) ریسک تولیدکننده 5% است یعنی احتمال این‌که یک طرح نمونه‌گیری انباشته با کیفیت خوب را رد کند، 5% است.

۴) استاندارد MILSTD105E بر اساس نقطه LTPD طراحی شده است.

حل : گزینه ۴ صحیح است.

نکته: استاندارد MIL STD 105E بر اساس نقطه AQL طراحی شده است.

۳ ـ کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) هر چه عدد C کوچکتر شود بازرسی سخت‌گرانه‌تر می‌شود و منحنی OC به سمت چپ حرکت خواهد کرد.

۲) هر چه عدد C کوچکتر شود بازرسی سخت‌گیرانه‌تر می‌شود و منحنی OC به سمت راست حرکت خواهد کرد.

۳) اگر اندازه‌ی انباشته کم باشد نمودار OC نوع B استفاده می‌شود.

۴) در هیچ شرایطی منحنی OC نوع A و B بر هم منطبق نمی‌شوند.

حل : گزینه ۱ صحیح است.

۴ ـ AQL عبارت است از...............

۱) سطح کیفیت خروجی
۲) متوسط اندازه نمونه
۳) سطح کیفیت قابل قبول
۴) مشخصه فنی برای محصول

حل : گزینه ۳ صحیح است.

۵ ـ در استاندارد MIL STD105E برای انباشته‌هایی با اندازه‌ی $N = 3000$ و سطح بازرسی III و $AQL = 0.65$ طرح دو بار نمونه‌گیری به صورت زیر برای بازرسی تنگ‌تر شده است.

$$n_1 = 125 \qquad c_1 = 0$$
$$n_2 = 125 \qquad c_2 = 3$$

برای انباشته‌هایی که سطح کیفیت $p = 0.02$ باشد احتمال پذیرش کدام گزینه است؟

۱) 0.718
۲) 0.282
۳) 0.181
۴) 0.082

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$n = 125 \qquad \lambda = np = 125 \times \frac{2}{100} = 2.5$$
$$p = 0.02$$

احتمال پذیرش توسط نمونه‌ی اول $= P(x \le 0) = 0.082$

احتمال پذیرش توسط نمونه‌ی دوم $= p\left(d_1=1, d_2\le 2\right)+p\left(d_1=2, d_2\le 1\right)+p\left(d_1=3, d_2=0\right)$

$$=\frac{e^{-2.5}\times 2.5}{1!}\times 0.543+\frac{e^{-2.5}\times 2.5^2}{2!}\times 0.287+\frac{e^{-2.5}\times 2.5^3}{3!}\times 0.082=0.20$$

احتمال پذیرش $= 0.2+0.082=0.282$

۶ـ در استاندارد MIL STD105E برای انباشته‌های $N=1000$ تایی و $AQL=0.65\%$ در سطح III بازرسی طرح دو بار نمونه‌گیری بازرسی نرمال به‌صورت زیر می‌باشد.

$n_1=80 \quad c_1=0$

$n_2=80 \quad c_2=3$

متوسط اندازه‌ی نمونه برای $P=0.01$ برابر کدام گزینه است؟

۱) 161 ۲) 80 ۳) 160 ۴) 117

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$\lambda=0.01\times 80=0.8$

توسط نمونه اول رد یا پذیرش شود $P_1=P\left(X\le 0\right)+P\left(X\ge 4\right)=0.449+\left(1-0.990\right)=0.459$

$ASN=n_1+n_2\left(1-P_1\right)=80+80\left(1-0.459\right)=160.541$

۷ـ در طرح جفت نمونه‌گیری $c_1=0$, $n_1=22$, $c_1=5$, $n_2=33$ چنانچه در نمونه اول تعداد اقلام معیوب 3 باشد باید چه کرد؟

۱) انباشته رد می‌شود. ۲) انباشته پذیرش می‌شود.

۳) نمونه مردود می‌شود. ۴) نمونه‌ی دوم برداشته می‌شود و بازرسی می‌شود.

۸ـ کدام گزینه در طرح MIL STD 105E صحیح می‌باشد؟

۱) در بازرسی نرمال، هرگاه دو از پنج انباشته متوالی در بازرسی اولیه رد شوند بازرسی نرمال به بازرسی تنگ‌تر شده تغییر پیدا می‌کند.

۲) در بازرسی تنگ‌تر شده هر گاه پنج انباشته‌ی متوالی در بازرسی اولیه پذیرش شوند بازرسی تنگ‌تر شده به بازرسی نرمال تغییر می‌یابد.

۳) در مواقعی که 10 انباشته متوالی بر اساس روش بازرسی تنگ‌تر شده بازرسی شوند باید بازرسی متوقف گردد و اقداماتی در سطح سازمان تامین‌کننده انجام گیرد.

۴) هر سه مورد صحیح می‌باشد.

حل : گزینه ۴ صحیح است.

۹ـ محصولی در انباشته‌های 1000 تایی بازرسی می‌شود. و نسبت اقلام معیوب فرآیند معلوم نیست یک طرح جفت نمونه‌گیری با حد متوسط کیفیت خروجی 3% چه پارامترهایی دارد؟

۱) $n_1=48 \quad c_1=1$ ، $n_2=97 \quad c_2=8$

۲) $n_1=70 \quad c_1=2$ ، $n_2=120 \quad c_2=10$

۳) $n_1=20 \quad c_1=0$ ، $n_2=33 \quad c_2=4$

۴) $n_1=25 \quad c_1=0$ ، $n_1=35 \quad c_1=3$

حل : گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به این‌که نسبت اقلام معیوب فرآیند معلوم نیست باید به ستون آخر جدول داج رومیگ مراجعه کرد.

۱۰ ـ استاندارد MIL STD105E برای انباشته‌های $N = 1000$ تایی و $AQL = 0.65\%$ در سطح III بازرسی طرح دو بار نمونه‌گیری بازرسی نرمال به‌صورت زیر می‌باشد:

$n_1 = 80 \quad c_1 = 0$
$n_2 = 80 \quad c_2 = 3$

اگر $P = 0.05$ باشد در صورت بازرسی اصلاحی مقدار سطح کیفیت خروجی کدام است؟

۱) 0.00225　　۲) 0.00125　　۳) 0.00335　　۴) 0.00420

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$AOQ = \frac{\left[P_a^I(N-n_1)+P_a^{II}(N-n_1-n_2)\right]P}{N}$$

$\lambda = np = 80\times 0.05 = 4$

$P_a^I = P(X\le 0) = 0.018$

$$P_a^{II} = P(d_1=1\,,\,d_2\le 2)+P(d_1=2\,,\,d_2\le 1)+P(d_1=3,d_2\le 0)$$
$$= \frac{e^{-4}\times 4^1}{1!}\times 0.238+\frac{e^{-4}\times 4^2}{2!}\times 0.091+\frac{e^{-4}\times 4^3}{3!}\times 0.018 = 0.034$$

$$AOQ = \frac{\left[0.018\times(1000-80)+0.034\times(1000-80-80)\right]\times 0.05}{1000} = 0.0025$$

۱۱ ـ در تست قبلی احتمال پذیرش انباشته کدام گزینه است؟

۱) 0.018　　۲) 0.034　　۳) 0.014　　۴) 0.052

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$P_a^{II} + P_a^{II} = 0.018 + 0.034 = 0.052$

۱۲ ـ در یک نمونه‌گیری با طرح توافق شده‌ی از نوع MILSTD105E جفت نمونه‌گیری و سطح II بازرسی تنگ‌تر شده می‌باشد. ریسک تولیدکننده 10% و ریسک مصرف‌کننده 5% می‌باشد و سطح کیفیت قابل قبول برای تولیدکننده و مصرف‌کننده 1% است. مشتری با چه احتمالی یک محموله‌ی بد را نمی‌پذیرد؟

۱) 0.1　　۲) 0.9　　۳) 0.05　　۴) 0.95

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$1-\beta = 0.95$ احتمال رد نمونه‌ی بد　　　$\beta = 0.05$ احتمال پذیرش نمونه‌ی بد

۱۳ ـ در قسمت بالا احتمال پذیرفتن نمونه‌ی خوب کدام گزینه است؟

۱) 0.1　　۲) 0.9　　۳) 0.05　　۴) 0.95

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$1-\alpha = 0.9$ احتمال پذیرش نمونه‌ی خوب　　　$\alpha = 0.1$ احتمال رد نمو نه‌ی خوب

۱۴ ـ محصولی در انباشته‌هایی که به اندازه $N = 8000$ حمل می‌شود. می‌خواهیم از طرح یک بار نمونه‌گیری با $AOQL = 3\%$ استفاده کنیم، نسبت اقلام معیوب فرآیند تامین کننده معلوم نیست ولی حدس بر این است که فرآیند او در سطح 0.1 معیوبی عمل می‌کند طرح نمونه‌گیری داج رومیگ آن کدام گزینه است؟

۱) $n = 280 \quad c = 13 \quad LTPD = 6.8\%$

۲) $n = 22 \quad c = 1 \quad LTPD = 16.4\%$

۳) $n = 65 \quad c = 3 \quad LTPD = 10.3\%$

۴) $n = 44 \quad c = 2 \quad LTPD = 11.8\%$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$N = 8000 \quad AOQL = 3\% \quad P \le \%1$

$n = 65 \quad c = 3 \quad LTPD = \%10.3$

۱۵ ـ در تست بالا مقدار ATI را در سطح معیوب 1% کدام گزینه است؟

۱) 98 ۲) 100 ۳) 108 ۴) 102

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$P_a = \sum_{d=0}^{c} bin(n,p) = \sum_{d=0}^{3} b(65, 0.01) = 0.9958$$

$$ATI = n + (1 - P_a)(N - n) = 65 + (1 - 0.9958) \times (8000 - 65) = 98$$

۱۶ ـ محصولی در انباشته‌های 1000 تایی حمل می‌شود و نسبت اقلام معیوب نمی‌باشد و حد متوسط کیفیت خروجی 3% است طرح جفت نمونه‌گیری داج ـ رومیک است طراحی طرح نمونه‌گیری مناسب کدام گزینه است؟

۱) $n_1 = 30 \quad c_1 = 0$, $n_2 = 33 \quad c_2 = 10$

۲) $n_1 = 25 \quad c_1 = 0$, $n_2 = 40 \quad c_2 = 3$

۳) $n_1 = 70 \quad c_1 = 2$, $n_2 = 120 \quad c_2 = 10$

۴) $n_1 = 49 \quad c_1 = 1$, $n_2 = 86 \quad c_2 = 7$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

۱۷ ـ در تست فوق مقدار LTPD برای طرح کدام گزینه است؟

۱) %11.4 ۲) %12.8 ۳) %9.8 ۴) %8.4

حل : گزینه ۴ صحیح است.

۱۸ ـ اگر در سوال فوق نسبت اقلام معیوب انباشته‌های ورودی $P = 0.01$ باشد. احتمال این‌که کار به تصمیم‌گیری دوم برسد کدام گزینه است؟

۱) 0.965 ۲) 0.035 ۳) 0.7 ۴) 0.35

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$\lambda = np = 0.01 \times 70 = 0.7$

P (عدم تصمیم‌گیری نمونه اول) $= P(3 \le d_1 \le 10) = P(d_1 \le 10) - P(d_1 \le 2) = 1 - 0.965 = 0.035$

۱۹ ـ در سوال فوق اگر بخواهیم طرح یک‌بار نمونه‌گیری با $c = 0$ را طوری تعریف کنیم که با سطح کیفیت LTPD را با احتمال 0.95 رد کند مقدار مناسب برای n کدام گزینه است؟

۱) 35 ۲) 44 ۳) 54 ۴) 24

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$LTPD = 0.084$$

$$1-\beta = 0.95 \qquad \beta = 0.05 = P(d=0) = \binom{n}{0}(0.084)^0(0.916)^n$$

$$0.05 = (0.916)^n \qquad Ln = 0.05 = nLn\,0.916 \qquad n = \frac{Ln0.05}{Ln0.916} = 34.14$$

۲۰ ـ در طرح یک‌بار نمونه‌گیری با افزایش اندازه نمونه n و عدد پذیرش صفر n را به گونه‌ای تعیین کنید که ریسک تولیدکننده برای انباشته‌ای با سطح کیفیت 1% برابر 5% باشد؟

۱) 10 ۲) ۶ ۳) 6 ۴) 3

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$1-\alpha = P_a = P(d=0) = \binom{n}{0}(AQL)^0(1-AQL)^n \Rightarrow 1-\alpha = (1-AQL)^n$$

$$0.95 = (1-0.01)^n \qquad \ell n = 0.95 = n\ \ell n\ 0.99 \qquad n = \frac{\ell n0.95}{\ell n0.95} = 5.10 \simeq 6$$

۲۱ ـ در یک طرح یک‌بار نمونه‌گیری بالا اندازه‌ی n=100 و عدد پذیرش صفر LTPD را به گونه‌ای تعیین کنید که ریسک مصرف‌کننده برابر 5% شود؟

۱) $\sqrt[100]{0.05}$ ۲) $1-\sqrt[100]{0.05}$ ۳) $\sqrt[100]{0.95}$ ۴) $1-\sqrt[100]{0.95}$

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$P_a = \beta = \binom{n}{0}(LTPD)^0(1-LTPD)^n \qquad \sqrt[n]{\beta} = 1-LTPD$$

$$\sqrt[100]{0.05} = 1-LTPD \Rightarrow LTPD = 1-\sqrt[100]{0.05}$$

۲۲ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) در طرح‌های داج ـ رومیگ معیار ATI مینیمم می‌شود.

۲) چنانچه نسبت اقلام معیوب خیلی کم باشد متوسط تعداد نمونه‌ها در طرح جفت‌گیری از طرح یک بار نمونه‌گیری کمتر است.

۳) در صورتی که تامین‌کننده سابقه‌ی خوبی داشته باشد از روش نمونه‌گیری برای پذیرش استفاده می‌کنیم.

۴) هر چه شیب منحنی OC زیادتر باشد قدرت تمایز آن بیشتر است.

حل : گزینه ۳ صحیح است.

۲۳ ـ در یک طرح نمونه‌گیری پی در پی با $P_1 = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $P_2 = 0.02$, $\beta = 0.2$ شیب خط پذیرش برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\dfrac{\log 0.99}{\log \frac{49}{19}}$ ۲) $\dfrac{\log 0.96}{\log \frac{19}{49}}$ ۳) $\dfrac{\log 1.03}{\log \frac{49}{19}}$ ۴) $\dfrac{\log 1.03}{\log \frac{19}{49}}$

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$S=\frac{\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_2}\right)}{K}$$

$$K=\log\left(\frac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)}\right)=\log\left(\frac{0.02(1-0.05)}{0.05(1-0.02)}\right)=\log\frac{0.019}{0.049}=\log\frac{19}{49}$$

$$S=\frac{\log\frac{0.95}{0.98}}{\log\frac{19}{49}}=\frac{\log 0.96}{\log\frac{19}{49}}$$

۲۴ـ در تست بالا عرض از مبدا خط پذیرش کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\log 49.5}{\log\frac{19}{49}}$ ۲) $\frac{\log 0.02}{\log\frac{19}{49}}$ ۳) $\frac{\log 0.98}{\log\frac{19}{14}}$ ۴) $\frac{\log 49.5}{\log\frac{49}{19}}$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$h_1=\frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{K}=\frac{\log\frac{0.99}{0.2}}{\log\frac{19}{49}}=\frac{\log 49.5}{\log\frac{19}{49}}$$

۲۵ـ در تست بالا عرض از مبدا خط رد کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\log 80}{\log\frac{19}{49}}$ ۲) $\frac{\log 49.5}{\log\frac{19}{49}}$ ۳) $\frac{\log 80}{\log\frac{49}{14}}$ ۴) $\frac{\log 49.5}{\log\frac{49}{19}}$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$h_2=\frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{k}=\frac{\log\frac{0.8}{0.01}}{\log\frac{19}{49}}=\frac{\log 80}{\log\frac{19}{49}}$$

اگر

Acceptable Quality Levels (normal inspection)

Sample size code letter	Sample size	0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1250	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2000	↑	↑	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Acceptable Quality Levels (tightened inspection)

Sample size code letter	Sample size	0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1250	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2000	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S	3150			1 2																							

	Process Average																	
	0–0.06%			0.07–0.60%			0.61–1.20%			1.21–1.80%			1.81–2.40%			2.41–3.00%		
Lot Size	n	c	LTPD %	n	c	LTPD %	n	c	LTPD %	n	c	LTPD %	n	c	LTPD %	n	c	LTPD %
1–10	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—
11–50	10	0	19.0	10	0	19.0	10	0	19.0	10	0	19.0	10	0	19.0	10	0	19.0
51–100	11	0	18.0	11	0	18.0	11	0	18.0	11	0	18.0	11	0	18.0	22	1	16.4
101–200	12	0	17.0	12	0	17.0	12	0	17.0	25	1	15.1	25	1	15.1	25	1	15.1
201–300	12	0	17.0	12	0	17.0	26	1	14.6	26	1	14.6	26	1	14.6	40	2	12.8
301–400	12	0	17.1	12	0	17.1	26	1	14.7	26	1	14.7	41	2	12.7	41	2	12.7
401–500	12	0	17.2	27	1	14.1	27	1	14.1	42	2	12.4	42	2	12.4	42	2	12.4
501–600	12	0	17.3	27	1	14.2	27	1	14.2	42	2	12.4	42	2	12.4	60	3	10.8
601–800	12	0	17.3	27	1	14.2	27	1	14.2	43	2	12.1	60	3	10.9	60	3	10.9
801–1,000	12	0	17.4	27	1	14.2	44	2	11.8	44	2	11.8	60	3	11.0	80	4	9.8
1,001–2,000	12	0	17.5	28	1	13.8	45	2	11.7	65	3	10.2	80	4	9.8	100	5	9.1
2,001–3,000	12	0	17.5	28	1	13.8	45	2	11.7	65	3	10.2	100	5	9.1	140	7	8.2
3,001–4,000	12	0	17.5	28	1	13.8	65	3	10.3	85	4	9.5	125	6	8.4	165	8	7.8
4,001–5,000	28	1	13.8	28	1	13.8	65	3	10.3	85	4	9.5	125	6	8.4	210	10	7.4
5,001–7,000	28	1	13.8	45	2	11.8	65	3	10.3	105	5	8.8	145	7	8.1	235	11	7.1
7,001–10,000	28	1	13.9	46	2	11.6	65	3	10.3	105	5	8.8	170	8	7.6	280	13	6.8
10,001–20,000	28	1	13.9	46	2	11.7	85	4	9.5	125	6	8.4	215	10	7.2	380	17	6.2
20,001–50,000	28	1	13.9	65	3	10.3	105	5	8.8	170	8	7.6	310	14	6.5	560	24	5.7
50,001–100,000	28	1	13.9	65	3	10.3	125	6	8.4	215	10	7.2	385	17	6.2	690	29	5.4

	Process Average																	
	0–0.06%						0.07–0.60%						0.61–1.20%					
	Trial 1		Trial 2			LTPD	Trial 1		Trial 2			LTPD	Trial 1		Trial 2			LTPD
Lot Size	n_1	c_1	n_2	n_1+n_2	c_2	%	n_1	c_1	n_2	n_1+n_2	c_2	%	n_1	c_1	n_2	n_1+n_2	c_2	%
1–10	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—
11–50	10	0	—	—	—	19.0	10	0	—	—	—	19.0	10	0	—	—	—	19.0
51–100	16	0	9	25	1	16.4	16	0	9	25	1	16.4	16	0	9	25	1	16.4
101–200	17	0	9	26	1	16.0	17	0	9	26	1	16.0	17	0	9	26	1	16.0
201–300	18	0	10	28	1	15.5	18	0	10	28	1	15.5	21	0	23	44	2	13.3
301–400	18	0	11	29	1	15.2	21	0	24	45	2	13.2	23	0	37	60	3	12.0
401–500	18	0	11	29	1	15.2	21	0	25	46	2	13.0	24	0	36	60	3	11.7
501–600	18	0	12	30	1	15.0	21	0	25	46	2	13.0	24	0	41	65	3	11.5
601–800	21	0	25	46	2	13.0	21	0	25	46	2	13.0	24	0	41	65	3	11.5
801–1,000	21	0	26	47	2	12.8	21	0	26	47	2	12.8	25	0	40	65	3	11.4
1,001–2,000	22	0	26	48	2	12.6	22	0	26	48	2	12.6	27	0	58	85	4	10.3
2,001–3,000	22	0	26	48	2	12.6	25	0	40	65	3	11.4	28	0	62	90	4	10.0
3,001–4,000	23	0	26	49	2	12.4	25	0	45	70	3	11.0	29	0	76	105	5	9.6
4,001–5,000	23	0	26	49	2	12.4	26	0	44	70	3	11.0	30	0	75	105	5	9.5
5,001–7,000	23	0	27	50	2	12.2	26	0	44	70	3	11.0	30	0	80	110	5	9.4
7,001–10,000	23	0	27	50	2	12.2	27	0	43	70	3	11.0	30	0	80	110	5	9.4
10,001–20,000	23	0	27	50	2	12.2	27	0	43	70	3	11.0	31	0	94	125	6	9.2
20,001–50,000	23	0	27	50	2	12.2	28	0	67	95	4	9.7	55	1	120	175	8	8.0
50,001–100,000	23	0	27	50	2	12.2	31	0	84	115	5	9.0	60	1	140	200	9	7.6