تحقیق در عملیات ۱

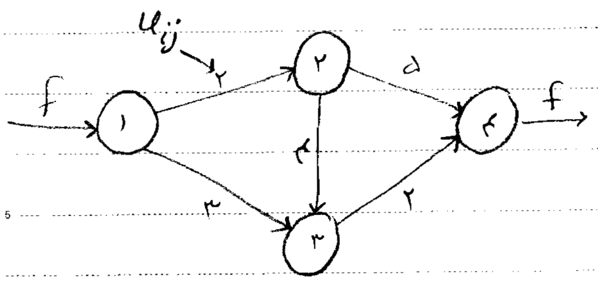
استاد گرانقدر آقای دکتر کاظمی متین

بر اساس کتاب برنامه ریزی خطی مختار بازارا

ویژه کنکور ارشد مهندسی صنایع

تحقیق در عملیات

مثال - ماکزیمم جریان -



x_{ij} = میزان کالای انتقالی روی کمان i به j

Max f

$x_{12}+x_{13}-f=0$ گره ۱

$x_{23}+x_{24}-x_{12}=0$ گره ۲

$x_{34}-x_{13}-x_{23}=0$ گره ۳

$f-x_{24}-x_{34}=0$ گره ۴

آزاد f و $0\le x_{34}\le 2$ و $0\le x_{24}\le 5$ و $0\le x_{23}\le 4$ و $0\le x_{13}\le 3$ و $0\le x_{12}\le 2$

مثال)

	میز	صندلی	منابع
چوب m^2	۳	۱/۷	۴۰۰
نیروی انسانی h	۱۰	۸	۱۲۰ ساعت
سود	۳۰	۱۴	

x_1 = تعداد میز

x_2 = تعداد صندلی

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 14x_2$$
$$3x_1 + 1.7x_2 \le 400$$
$$10x_1 + 8x_2 \le 120$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تست - یک محصول از مونتاژ ۳ قطعه A، B و C ساخته می‌شود. جهت تولید آن به ۲ قطعه از نوع A، ۱ قطعه از نوع B و ۳ قطعه از نوع C نیاز است. اگر x_A و x_B و x_C به ترتیب تعداد تولید هر یک از این ۳ قطعه باشد و هدف افزایش محصول نهایی، تابع هدف لازم است؟

۱) $\text{Max Min}\{x_A, x_B, x_C\}$ A = ۲

۲) $\text{Max Min}\{2x_A, x_B, 3x_C\}$ B = ۱

۳) $\text{Max Min}\{x_A + x_B + x_C\}$ C = ۳

✓ ۴) $\text{Max Min}\{\frac{x_A}{2}, x_B, \frac{x_C}{3}\}$

اصول حاکم بر برنامه‌ریزی خطی

۱- تناسب (هزینه ثابت مستقل از میزان) ۲- اصل جمع‌پذیری ۳- تقسیم‌پذیری ۴- قطعیت

فرم کلی مسائل LP: $\text{Max (Min)}\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ تابع هدف

$$\text{s.t.}\quad \text{محدودیت‌های مسئله}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\ (\le = \ge)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\ (\le = \ge)\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n\ (\le = \ge)\ b_m \end{cases}\quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}\ \text{منابع مسئله}$$

$n+m$

محدودیت‌های مسئله $\{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$

$C = C_1, C_2, \dots, C_n$ = بردار ضرایب هدف (گرادیان)

$x =$ بردار متغیرها $= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

$b =$ بردار منابع (سمت راست) $= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$$\text{Max (Min)}\ Z = Cx$$
$$\text{s.t.}\quad Ax\ (\le = \ge)\ b$$
$$x \ge 0$$

سطر iام: ترانهاده $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})_{1\times n}$

ستون jام: $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

بیان برحسب سطرها:

$$\text{Min}\ Z = Cx$$
$$\text{s.t.}\quad a^i x \ge b_i$$
$$x \ge 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{Min}\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Min}\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n$$

دستکاری مسئله - $-Max(-Cx) = Min\ Cx$

$s.t\ \ x \in S \qquad s.t\ \ x \in S$ ناحیه شدنی

نکته - با ضرب تابع هدف در (1-) مسائل از نوع Max , Min را می‌توان به هم تبدیل کرد.

محدودیت ها -

(I) $a^i x \le b \longrightarrow a^i x + x_s = b$ — $+x_s$ متغیر کمکی از نوع کمبود (slack) = S

(II) $a^i x \ge b \longrightarrow a^i x - x_s = b$ — $-x_s$ متغیر کمکی از نوع مازاد

(III) $a^i x = b \longrightarrow \begin{cases} a^i x \le b_i \\ \text{و} \\ a^i x \ge b_i \end{cases}$

مثال - $Max\ Z = Cx$

$2x_1 + x_2 \le 2 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1, x_2 \ge 0 \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0$

متغیرها -

$x_j \le 0 \longrightarrow y_j = -x_j$

$y_j \ge 0$

$x_j^+, x_j^- \ge 0$ و $x_j = x_j^+ - x_j^-$

x_j نامقید

آزاد در علامت — $\vec{a}_j x_j \longrightarrow a_j x_j^+ - a_j x_j^-$

اگر k متغیر آزاد $x_1, x_2, \dots, x_k$ داشته باشیم داریم:

$x_j = x_j' - \bar{x}$

$x_j' \ge 0 , \bar{x} \ge 0$

$j = 1, \dots, k$

تعویض متغیرهای مربوط به قدر مطلق

$|y| = y_1 + y_2$

s.t $\quad y = y_1 - y_2$

$y_1, y_2 \geqslant 0$ و $y_1 \cdot y_2 = 0$

صنایع ۸۳ -

Max $Z = |2x_1 - 3x_2|$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

تبدیل خطی

Max $Z = y_1 + y_2$

s.t $\quad 2x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0$

مثال) Min Max$\{|4x_1 + 5x_2 - 7|, |x_1 - 1|\}$

s.t $\quad x_1 + x_2 \leqslant 3$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

نکته) $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$

Min Z

$|4x_1 + 5x_2 - 7| \leqslant Z \Rightarrow -Z \leqslant 4x_1 + 5x_2 - 7 \leqslant Z$

$|x_1 - 1| \leqslant Z \qquad -Z \leqslant x_1 - 1 \leqslant Z$

$x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad x_1 + x_2 \leqslant 3$

$x_1, x_2 \geqslant 0 \qquad x_1, x_2 \geqslant 0$

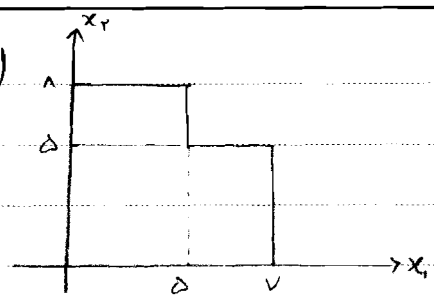
مثال) $|a| \geqslant b \rightarrow a \geqslant b \ \vee \ a \leqslant -b$

$$|x_1 - 2| \geqslant 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 \geqslant 5 \\ x_1 - 2 \leqslant -5 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال

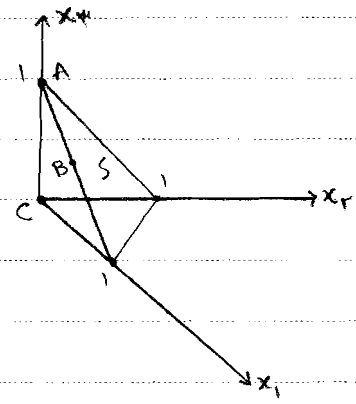


$$\begin{cases} x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \le 5 \ \vee \ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ (5 - x_1) + My \ge 0 \\ (5 - x_2) + M(1-y) \ge 0 \end{cases} \quad y \in \{0,1\}$$

M یک کران بالا برای x_1 و x_2 است مثلاً 10

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ 5 - x_1 \ge 0 \\ 5 - x_2 + M \ge 0 \rightarrow x_2 \le 15 \ \text{زائد هندسی} \end{cases} \qquad y = 1 \begin{cases} x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ 5 - x_1 + 10 \ge 0 \rightarrow x_1 \le 15 \ \text{زائد هندسی} \\ 5 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

صنایع ۸۶ -



$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (1)

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ ۴ محدودیت
(2) (3) (4)

A → (1), (2), (3)

B → (1) و (3)

C → (2), (3) و (4)

فرم های استاندارد (متعارفی) و کانونی مساله LP -

استاندارد Min (Max) Cx

s.t. Ax = b

$x \ge 0$

کانونی یا متعارفی

Max Z = Cx
s.t. Ax ≤ b
$x \ge 0$

Min Z = Cx
s.t. Ax ≥ b
$x \ge 0$

چند تعریف اولیه

جواب شدنی (موجه) ـ بردار $\bar{x}$ را یک جواب شدنی مسئله LP گوییم هرگاه در تمام محدودیت ها صدق کند

یعنی محدودیت ها را نقض نکند. $A\bar{x} \geq b$ و $\bar{x} \geq 0$

ناحیه شدنی (فضای جواب) ـ مجموعه تمام جواب های شدنی را ناحیه شدنی گوییم.

$$S = \{x \mid Ax \geq b \ , \ x \geq 0\}$$

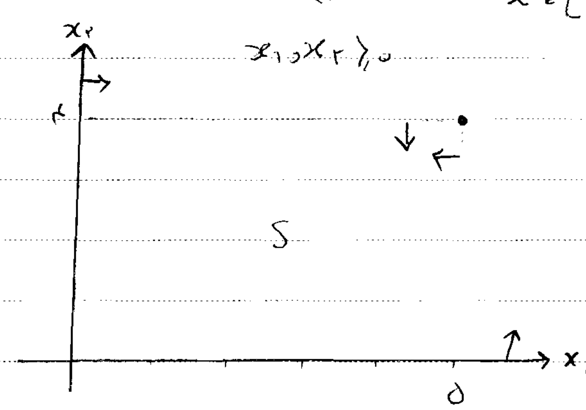
جواب بهینه ـ x^* را یک بردار جواب بهینه LP گوییم هرگاه:

(I) $x^* \in S \qquad Ax^* \geq b \ , \ x^* \geq 0$

(II) $\forall x \in S \qquad Cx^* \leq Cx$

مثال) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 \quad \rightarrow x_1 + x_2 \leq 9$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & x_1 \leq 5 & C = (1,1) \\ & x_2 \leq 4 & x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in S : x_1 + x_2 \leq 9$

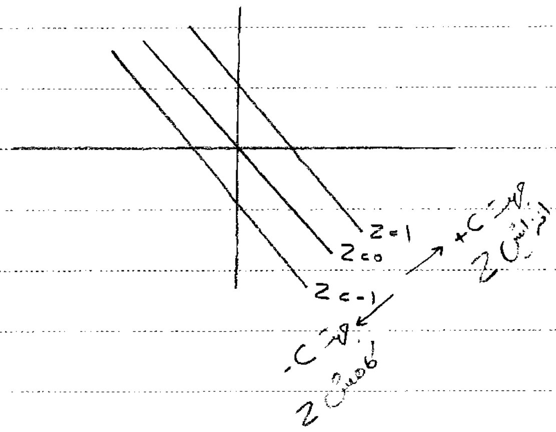
$\forall x \in S : Cx \leq C\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

جواب بهینه $x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

مقدار بهینه $Z^* = Cx^* = 9$

تراز های تابع هدف - { خطوط موازی یکدیگرند
$\pm C$ بر همه آنها عمود است }

مثال) $Z = x_1 + x_2$ $\quad C = [1, 1]$



$Z = -1 \rightarrow x_1 + x_2 = -1$

$Z = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0$

$Z = 1 \rightarrow x_1 + x_2 = 1$

نکته - $\vec{C}$ که جهت بهبود برای ماکزیمم سازی و $(-\vec{C})$ که جهت بهبود برای مسئله مینیمم سازی است

گام های حل هندسی -

۱- رسم ناحیه شدنی

۲- مشخص کردن جهت بهبود $\vec{C}$

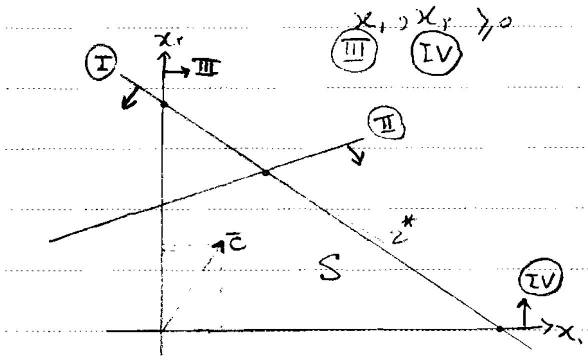
۳- انتقال تراز های تابع هدف به موازات خود درون ناحیه تا جایی که امکان پذیر است. سطح تماس آخر تراز بهینه و نقاط روی آن جواب بهینه است.

مثال) $\text{Min } Z = -x_1 - 2x_2$ $C = (-1, -2)$

$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\mathrm{I})$ $\bar{C} = -C = (1, 2)$

$-x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (\mathrm{II})$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\mathrm{III}) \; (\mathrm{IV})$

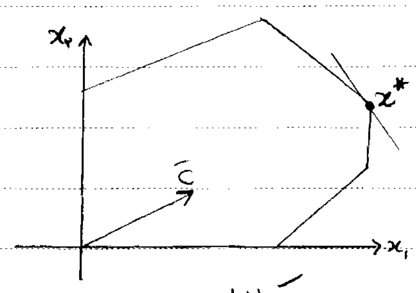


$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* = 6 \\ -x_1^* + 2x_2^* = 8 \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

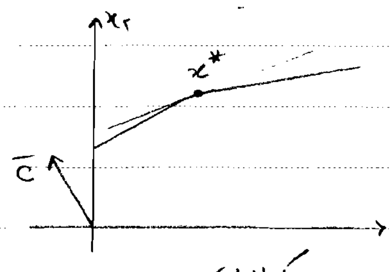
مقدار بهینه $Z^* = -\frac{4}{3} - 2\left(\frac{14}{3}\right) = -\frac{46}{3}$

حالت های مختلف فضای جواب و جواب بهینه -

جواب بهینه منحصر بفرد -

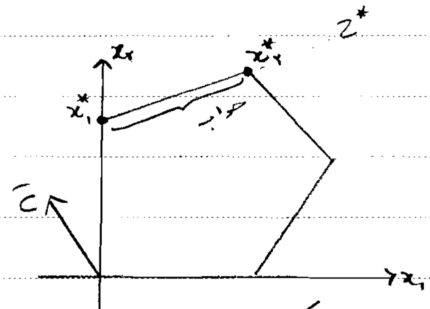


کراندار

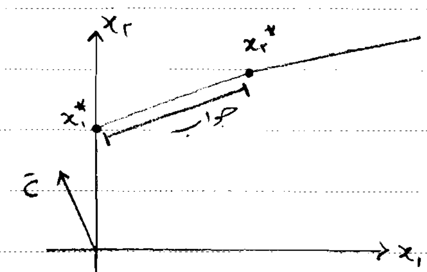


بی‌کران

جواب بهینه چندگانه -

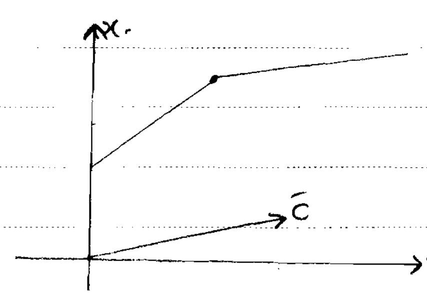


کراندار



بی‌کران

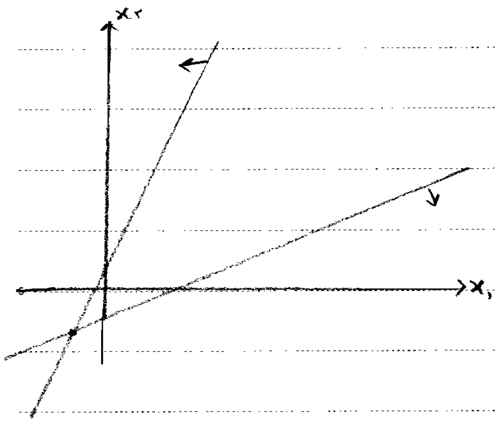
مقدار بهینه نامتناهی (فاقد جواب بهینه)

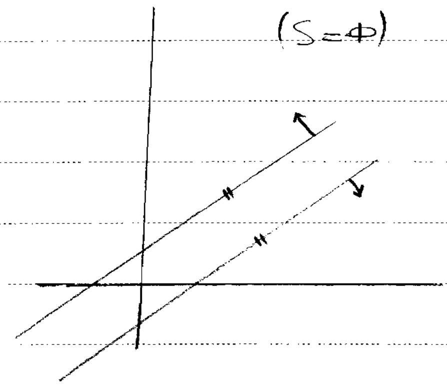


$\text{Min}: Z^* \rightarrow -\infty$

$\text{Max}: Z^* \rightarrow +\infty$

ناحیه شدنی تهی - $(S=\Phi)$





$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t. } Ax \geq b \qquad b_i \longrightarrow b_{i+1}$$
$$x \geq 0$$

چرا شرطی جواب دارد؟

$$S_1 = \{x \mid a^k x \geq b_k \quad k=1,\dots,m \,;\; x \geq 0\}$$

$$S_2 = \left\{x \;\middle|\; \begin{array}{l} a^k x \geq b_k \quad k \neq i \\ a^i x \geq b_{i+1} \geq b_i \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$x \in S_2 \longrightarrow x \in S_1 \Rightarrow S_2 \subset S_1$$

$$\text{Min } Cx \longrightarrow x^* \in S_1 \longrightarrow Cx^* \leq Cy^*$$
$$\text{s.t. } x \in S_1$$

$$\text{Min } Cx \longrightarrow y^* \in S_2 \subset S_1 \longrightarrow y^* \in S_1$$
$$\text{s.t. } x \in S_2$$

جواب بهتر نمی‌شود.

در کل: اگر تغییر مورد نظر ناحیه را کوچکتر کرد، مقدار بهینه بهتر نمی‌شود.
اگر تغییر مورد نظر ناحیه را وسیعتر کرد، مقدار بهینه بدتر نمی‌شود.

صنایع ۸۵)

$$Z_1 = Max\ u(x_1,\dots,x_n) \qquad Z_2 = Max\ u(x_1,\dots,x_n)$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \leq E \qquad s.t.\ \sum_{i=1}^{n} P'_i x_i \leq E$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \qquad x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

اگر $P'_i \geq P_i$ باشد آنگاه:

1) $Z_1 < Z_2$ 2) $Z_1 > Z_2$ ✓3) $Z_1 \geq Z_2$ 4) رابطه‌ای ندارند

$$\underbrace{\sum P_i x_i \leq \sum P'_i x_i \leq E}_{x \in S_2} \Rightarrow x \in S_1 \Rightarrow S_2 \subseteq S_1$$

صنایع ۸۵)

$$Min\ Z = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$s.t.\ f(x_1,\dots,x_n) = b$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

1) x_i افزایش می‌یابد

✓2) x_i افزایش نمی‌یابد

3) x_i کاهش می‌یابد

4) تغییرات x_1 مشخص نیست

صنایع ۸۴) با کدام شرط نمی‌توان منطقه قابل قبول یک مسئله LP را افزایش داد؟

✓1) افزایش تعداد محدودیت‌ها ← چون منطقه قابل قبول کوچکتر می‌شود.

2) تغییر اعداد سمت راست

3) تغییر در ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در محدودیت‌ها

4) تبدیل محدودیت‌های $\leq$ به $\geq$

نکته) زمانی که تابع هدف ثابت باشد یک نقطه درونی می‌تواند جزء جواب بهینه باشد.

نکته) بردار C ترکیب خطی از سطرهای ماتریس A است.

مقدمه‌ای بر جبر خطی و مجموعه‌های محدب

فرض کنیم a_1، ...، a_k، k بردار از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

۱- ترکیب خطی (پوسته خطی):

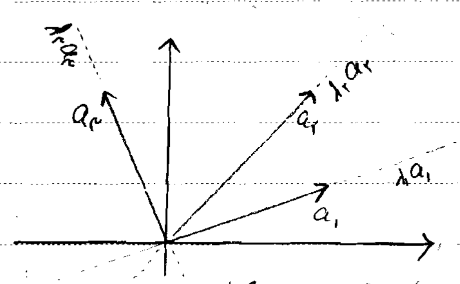
$$L\{a_1,\dots,a_k\}=\{\lambda_1\vec{a}_1+\dots+\lambda_k\vec{a}_k\ ,\ \forall i\ \ \lambda_i\in\mathbb{R}\}$$

۲- ترکیب خطی نامنفی

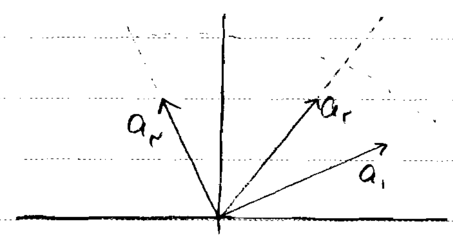
$$Pos\{a_1,\dots,a_k\}=\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{a}_j\ ,\ \forall j\ \ \lambda_j\geqslant 0\}$$

۳- ترکیب محدب

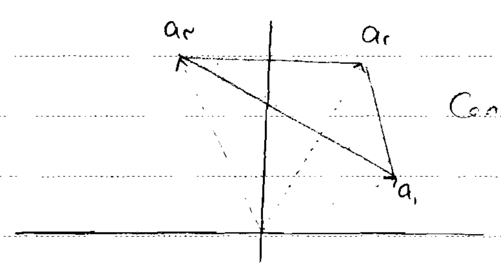
$$Conv\{a_1,\dots,a_k\}=\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{a}_j\ ,\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\ ,\ \forall j\ \ \lambda_j\geqslant 0\}$$



$L\{a_1,a_2,a_3\}$



$Pos\{a_1,a_2,a_3\}$



$Conv\{a_1,a_2,a_3\}$

استقلال و وابستگی خطی

تعریف مولد: بردارهای $a_1, \dots, a_k$ را مولد گوییم هرگاه: $L\{a_1,\dots,a_k\} = \mathbb{R}^n$

مثال) $a_1=(2,1)$ $\quad a_2=(1,2)$ $\quad a_3=(-1,2)$

مولد $\mathbb{R}^2$ اند. $\quad (\alpha,\beta) = \lambda_1(2,1)+\lambda_2(1,2)+\lambda_3(-1,2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=\alpha \\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=\beta \end{cases}$$

مولد ۳ عضوی

مثال) $e_1=(1,0)$ $\quad e_2=(0,1)$ مولد در $\mathbb{R}^2$ هستند (۲ عضوی)

تعریف پایه: یک مجموعه مولد را پایه گوییم هرگاه اگر عضوی از آن کم شود خاصیت مولد بودن را از دست بدهد. (مولد با کمترین تعداد عضو)

مثال) $\{(2,1),(1,2)\}$ پایه است برای $\mathbb{R}^2$

مثال) $\{(2,1),(1,2),(-2,1)\}$ مولد $\mathbb{R}^2$ هستند

وابستگی خطی: بردارهای $a_1,\dots,a_k$ را وابسته خطی گوییم هرگاه بتوان یک ترکیب خطی از این بردارها برابر با صفر نوشت طوری که همه‌ی ضرایب صفر نباشند.

$\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_k \qquad \lambda_1 a_1+\dots+\lambda_k a_k=\vec{0}$

تعریف استقلال خطی - اگر بردارهای $a_1, \dots, a_k$ وابسته خطی نباشند، مستقل خطی اند.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

پس پایه یا مبنا مولد مستقل خطی است.

مثال) $\{(1,0),(0,1)\}$ یک مبنای $\mathbb{R}^2$ اند.

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

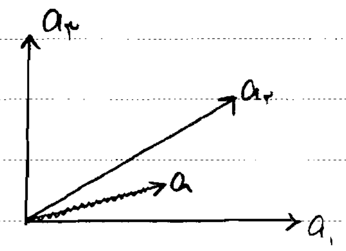
نکته) تعداد عناصر مبنای یک فضا عددی است ثابت که این عدد را بعد فضای برداری مورد نظر گویند پس

$$\dim(\mathbb{R}^m) = m$$

نکته) در یک فضای m بعدی هر مجموعه با بیش از m عضو حتماً وابسته است.

مثال) فرض کنیم $B = \{a_1, \dots, a_k\}$ مبنایی برای $\mathbb{R}^m$ باشد، $a \in \mathbb{R}^m$ پس $a = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m$

شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه $B' = \{a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_m\}$ حاصل از جایگزینی a به a_k از B، یک مبنای برای $\mathbb{R}^m$ باشد آن است که $\lambda_k \neq 0$



مثال) $B_1 = \{a, a_2, a_3\}$ ✓

$B_2 = \{a_1, a, a_3\}$ ✓

$B_3 = \{a_1, a_2, a\}$ ✗

$\{a_1, a_2, a_3\}$

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$

چون فقط در صفحه a_1 و a_2 می باشد.

شدنی بودن دستگاههای خطی $Ax=b \quad A\in\mathbb{R}_{m\times n} \quad b\in\mathbb{R}^m$

$a_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{nj}\end{bmatrix} \quad A=(a_1,\dots,a_n) \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n\end{bmatrix}$

$Ax=b \longrightarrow \vec{a}_1x_1+\dots+\vec{a}_nx_n=\vec{b}$

(دستگاه جواب دارد (سازگار است $\iff b\in L\{a_1,\dots,a_n\} \Rightarrow \overset{\text{رتبه}}{r}(A,b)=r(A)$

مثال) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}_{2\times 3}$

فضای سطری A: $L\{(2,-1,3),(0,3,-2)\}$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$

بعد فضای سطری را رتبه سطری A گوییم. رتبه سطری A در اینجا ۲ است.

فضای ستونی A: $L\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right\}$

بعد فضای ستونی را رتبه ستونی A گوییم. رتبه ستونی A در اینجا ۲ است.

قضیه: رتبه سطری و ستونی یک ماتریس برابرند.

رتبه ماتریس: بعد زیرفضای سطری یا ستونی A را رتبه A می‌گوییم و با $r(A)$ یا $rank(A)$ نشان می‌دهیم.

$A\in\mathbb{R}_{m\times n} \Rightarrow r(A)\leq \min\{m,n\}$

اگر $r(A)=\min\{m,n\}$ ، A را از رتبه کامل (Full Rank) گوییم.

مثال) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $r(A) = 1 < 3$ $\min\{3,4\}$

محاسبه رتبه ماتریس -

برای محاسبه رتبه ماتریس از عملیات سطری مقدماتی زیر استفاده می‌شود:

۱- جابجایی دو سطر ۲- ضرب یک سطر در اسکالری ناصفر ۳- افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

توضیح: عملیات سطری مقدماتی A، رتبه A را تغییر نمی‌دهد.

ماتریس کانونی - ماتریس $C \in \mathbb{R}_{m\times n}$ را کانونی گوییم هرگاه:

۱- سطرهای صفر درصورت وجود، سطرهای آخر باشند.

۲- اولین درایه ناصفر در هر سطر (جمله پیشرو) برابر ۱ باشد.

۳- جمله پیشرو، تنها درایه ناصفر ستون خود باشد.

۴- جمله پیشرو هر سطر، سمت راست جمله پیشرو سطر قبلی باشد.

مثال) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

توضیح: رتبه یک ماتریس کانونی سطری تعداد سطرهای ناصفر می‌باشند.

if $r(A,b) = r(A) \Rightarrow$

I $Ax = b$

II $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ دستگاه سازگار است $\iff b \in pos\{a_1, \dots, a_n\}$

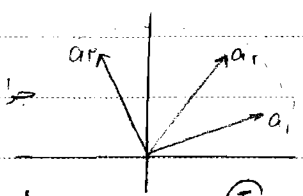
III $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq b \end{cases}$ دستگاه سازگار است $\iff L\{a_1, \dots, a_n\} \cap \{x \leq b\} \neq \emptyset$

IV $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ دستگاه سازگار است $\iff pos\{a_1, \dots, a_n\} \cap \{x \leq b\} \neq \emptyset$

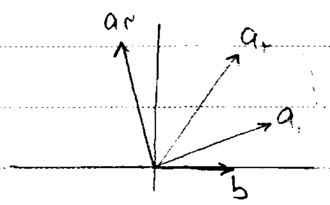
مثال) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

جواب دارد



I



II

$Ax = b$ | $Ax = b, \; x \geq 0$

$b \in L\{a_1, a_2, a_3\}$ | $pos\{a_1, a_2, a_3\}$

$r(A) = 2 = r(A,b)$ | $b \notin pos$ ناسازگار است

III $Ax \leq b, \; x \geq 0 \Rightarrow 0 \in pos\{a_1, a_2, a_3\} \cap \{x \leq b\} \neq \emptyset$

IV $Ax \geq b, \; x \geq 0$ جواب ندارد

$Ax=b \qquad A\in \mathbb{R}_{m\times n} \qquad b\in\mathbb{R}^m$

$r(A,b)\neq r(A)$ دستگاه جواب ندارد

$r(A,b)=r(A)$ دستگاه سازگار است

اگر $r(A,b)=r(A)=k\le\min\{m,n\}$ $\Rightarrow$

- $k=n$ دستگاه جواب یکتا دارد
- $k<n$ دستگاه بیشمار جواب دارد

مثال)

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+x_3=5 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad n=3$$

n = تعداد متغیر

m = تعداد محدودیت ها

$r(A)=r(A,b)=2<3$ دستگاه بیشمار جواب دارد

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=4-x_3 \\ x_1+x_2=5-x_3 \end{cases} \Rightarrow 5x_1=19-4x_3 \ , \ x_1=\frac{19}{5}-\frac{4}{5}x_3$$

$$x_2=5-x_3-\left(\frac{19}{5}-\frac{4}{5}x_3\right)=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}x_3$$

فضای جواب دستگاه

$$\begin{cases} x_1=\frac{19}{5}-\frac{4}{5}x_3 \\ x_2=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}x_3 \end{cases}$$

$$\left\{\left(\frac{19}{5}-\frac{4}{5}x_3,\ \frac{6}{5}-\frac{1}{5}x_3,\ x_3\right) \middle| \ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} 19/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}x_3 \ \middle| \ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

صنایع ۸۵) ۱- مسئله همواره جواب شدنی دارد. $\max\ C^T x$
✓۲- مسئله ممکن است فاقد جواب شدنی باشد. $s.t\ \ Ax = b$
۳- مسئله همواره دارای جواب بهینه محدود است. $x \geq 0$
۴- وجود جواب شدنی به کلاس ستونهای A بستگی دارد.

سیستم ۸۸) $Z = \sum c_j x_j$
کی مسئله ای S.O.C.S می شود؟ $s.t\ \sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\dots,m$
$x_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n$
جواب / $\forall i\ \ b_i \geq 0$

سیستم ۸۵) $\max\ Z = \sum c_j x_j$
$s.t\ \ \sum a_{ij} x_j \leq b_i$
$x_j \geq 0$
جواب / $S \neq \phi$

صنایع ۸۲) $Ax = b \qquad A \in R_{m \times n}$

دستگاه جواب ندارد $r(A,b) > r(A)$

صنایع ۸۱) دستگاه زیر مجموعه جواب پایه ای شدنی دارد؟ $\min\ Cx$
$s.t\ \ Ax = b$
$x \geq 0$
۱- $b \geq 0$
۲- سطرهای A مستقل نباشند
۳- $b \geq 0$ و $r(A) = n$
✓۴- b ترکیب خطی با ضرایب نامنفی از ستونهای A باشد.

مجموعه محدب - مجموعه $S \in \mathbb{R}^n$ را محدب گوییم هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in S \ , \ \forall \lambda \in [0,1] : (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \in S$$

- تعبیر هندسی - مجموعه محدب شامل پاره خط واصل بین هر دو نقطه از آن مجموعه هم هست.

تهی محدب است.

مجموعه تک عضوی محدب است.

اجتماع دو مجموعه‌ی محدب الزاماً محدب نیست

اشتراک هر تعداد مجموعه محدب، محدب است.

زیر مجموعه‌ی یک مجموعه محدب الزاماً محدب نیست

برخی مجموعه‌های محدب مهم:

$S_1 = \{x \mid Ax = b\}$

ناحیه شدنی مسئله LP استاندارد، محدب است. $S_2 = \{x \mid Ax = b \ , \ x \geq 0\}$

$S_3 = \{x \mid A_1 x \leq b_1 \ , \ A_2 x = b_2 \ , \ x \geq 0\}$

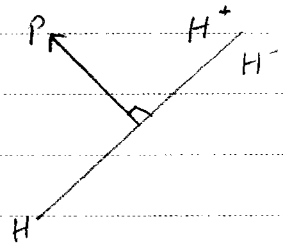
ابرصفحه‌ها - ثابت $k \in \mathbb{R}$ و $p \neq 0$ بردار افقی $H = \{x \mid px = k\}$

(مثال) $H = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7\right\}$

$$\underbrace{(2, -3, 4)}_{p}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{7}_{k}$$

هر ابرصفحه مجموعه‌ای است محدب

نکته - هر قید مسئله LP به فرم مساوی یک ابرصفحه است. $a^i x = b_i$



$H^+ = \{x \mid Px \geq k\} = \{x \mid p(x-x_0) \geq 0\}$

$H^- = \{x \mid Px \leq k\} = \{x \mid p(x-x_0) \leq 0\}$

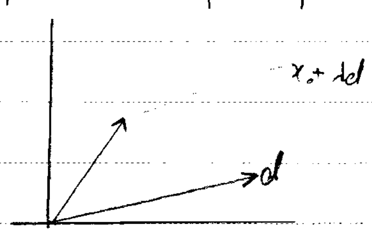
هر نیم‌فضا مجموعه‌ای محدب است

نکته - هر قید مسئله LP به فرم نامساوی یک نیم‌فضا است. $a^i x \leq b_i$ یا $a^i x \geq b_i$

شعاع (نیم‌خط) - $R = \{x_0 + \lambda d \ , \ \lambda \geq 0\}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ یک نقطه ثابت (راس نیم‌خط)

بردار $d \neq 0$ را امتداد نیم‌خط می‌گوییم. $R = \{x_0 + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ $x_0 = \binom{1}{1}$ $d = \binom{2}{1}$



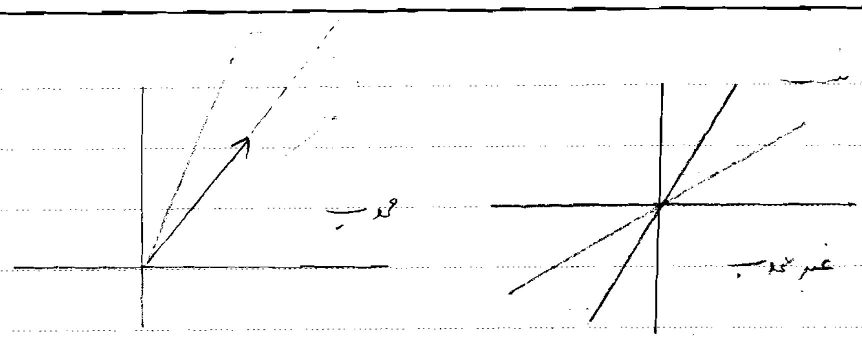
هر نیم‌خط مجموعه‌ای است محدب

مخروط‌ها (Cone) - $C \in \mathbb{R}^n$ را مخروط می‌گوییم هرگاه:

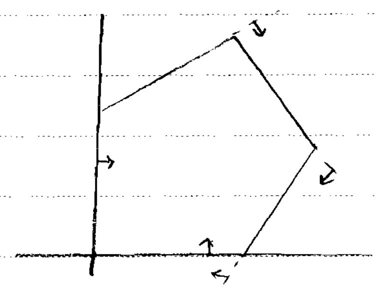
$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow (\lambda x) \in C$

هر مخروط شامل مبدأ است.

هر مخروطی الزاما محدب نیست



چندوجهی - هر چندوجهی اشتراک تعداد متناهی نیم فضاست و لذا هر چندوجهی محدب است.



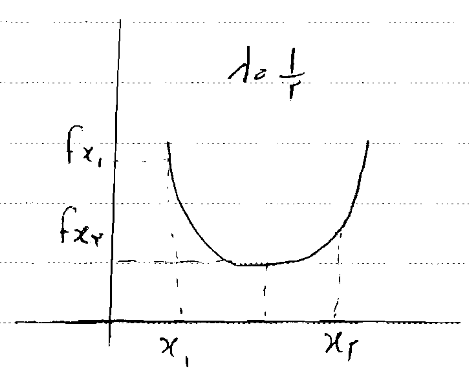
ناحیه شدنی یک مسئله LP چندوجهی است.

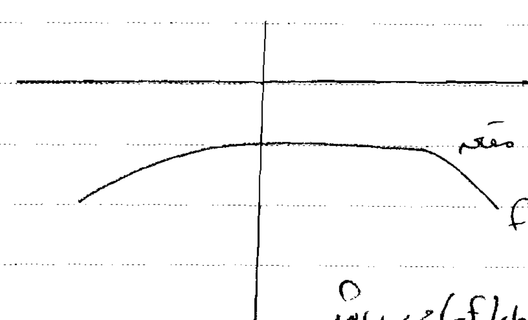
$$S = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \Rightarrow S = \left\{x \,\middle|\, \begin{array}{ll} a^i x \leq b_i & i = 1, \dots, m \\ e_j x \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{array}\right\}$$

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

تابع محدب - تابع $f: D_f \subset R^n \to R$ را که D_f یک مجموعه‌ای است محدب، یک تابع محدب گوییم هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$





تابع f را مقعر گوییم هرگاه (-f) محدب باشد

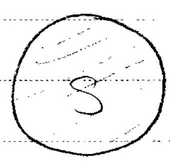
مثال مهم - تابع خطی مسئله؟ اما هم محدب است هم مقعر

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = C(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$
$$= \lambda C x_1 + (1-\lambda) C x_2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

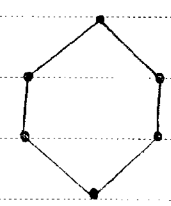
قضیه اساسی بهینه‌سازی محدب - در مینیمم (ماکسیمم) سازی یک تابع محدب (مقعر) بر مجموعه‌ای محدب هر مینیمم (ماکسیمم) موضعی، سراسری است.

تعریف نقطه رأسی - $\bar{x}$ را یک نقطه رأسی مجموعه محدب S گوییم هرگاه نتوان آن را به فرم ترکیب محدب اکید از هیچ دو نقطه متمایز دیگر S نوشت. یعنی نقطه رأسی را نمی‌توان درون هیچ پاره خطی که کلا در ناحیه است قرار داد.

$\bar{x} \in S$ رأسی است $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1] \quad \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$



دایره بینهایت نقطه راسی دارد

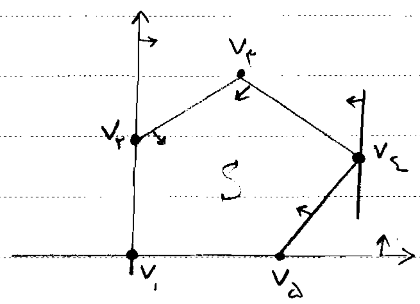


نقطه رأسی (تعریف پوششی) - فرض کنیم S محدب است، $\bar{x} \in S$ رأسی است اگر و تنها اگر $S \setminus \{\bar{x}\}$ محدب باشد.

تعریف دوم هندسی نقطه راسی (مختص چند وجهی ها) - $\bar{X}$ را یک نقطه راسی چند وجهی $S \subset R^n$ گوییم هرگاه دست کم n تا ابرصفحه مستقل خطی تعریف کننده ناحیه از $\bar{X}$ بگذرد.

نکته - اگر از یک نقطه راسی بیش از n ابرصفحه بگذرند آن نقطه راسی تباهیده (تبهگن - degenerate) است.

نکته - درجه تباهیدگی یک نقطه راسی تعداد ابرصفحه‌های اضافی گذرنده از آن است.

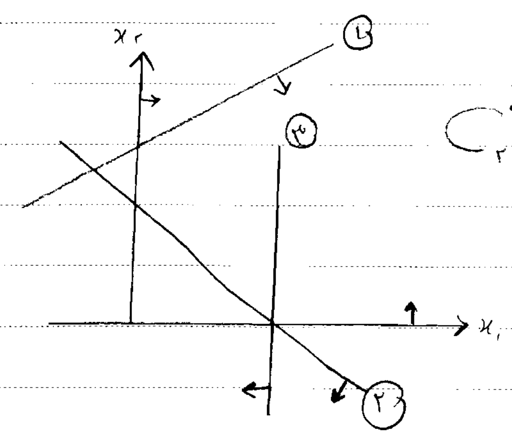


v_2 یک نقطه راسی تباهیده است با درجه تباهیدگی 1

S دارای ۵ نقطه راسی است.

برای تعیین نقاط راسی در روش هندسی باید دستگاه‌های $n\times n$ حل کنیم.

مثال)
$$\begin{cases} -2x_1+x_2 \le 4 & (1) \\ x_1+x_2 \le 3 & (2) \\ x_1 \le 2 & (3) \\ x_1 \ge 0 & (4) \\ x_2 \ge 0 & (5) \end{cases}$$



$C^5_2 = \frac{5\times 4}{2}$ تا

دستگاه 2×2

(1) و (2)
$$\begin{cases} -2x_1+x_2=4 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

محدودیت زائد ـ محدودیتی است که حذف آن ناحیه را تغییر ندهد.

زائد هندسی ـ محدودیت زائدی که با ناحیه هیچ اشتراکی ندارد.

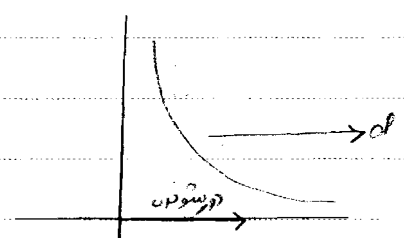
نکته ـ زائد بودن ربطی به مقدار تابع هدف ندارد.

نکته ـ تباهیدگی مشخصه ناحیه است ربطی به تابع هدف ندارد.

در تعریف نقطه راسی استقلال خطی ابرصفحه‌های گذرنده از $\bar{x}$ به این معنی است که ماتریس ضرایب این ابرصفحه‌ها از رتبه کامل می‌باشد.

جهت دورشونده یک مجموعه محدب ـ بردار $d \neq 0$ را یک جهت دورشونده می‌گوییم هرگاه

$$\forall x_0 \in S , \quad \forall \lambda \in [0, +\infty) \quad (x_0 + \lambda d) \in S$$

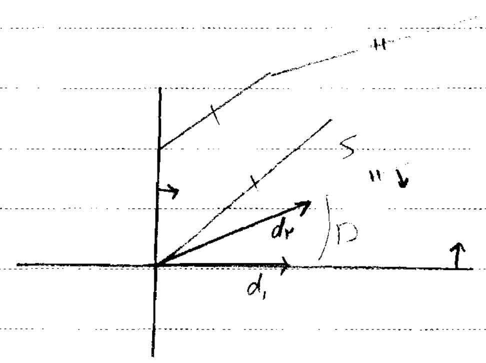


$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

تعمیم: شرط لازم و کافی برای آنکه $d \neq 0$ یک جهت دورشونده

چندوجهی ناحیه $S = \{x \mid Ax \le b , x \ge 0\}$ باشد

آن است که $Ad \le 0$ و $d \ge 0$



$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 5 \\ 2d_1 - d_2 \le 0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$S=\{x \mid Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\} \Rightarrow D=\{d \mid Ad\leqslant 0,\ d\geqslant 0,\ d\neq 0\}$$

$S\neq\phi$ بیکران است $\rightarrow D\neq\phi$

$$S=\{x \mid Ax=b,\ x\geqslant 0\} \Rightarrow D=\{d \mid Ad=0,\ d\geqslant 0\}$$

مثال

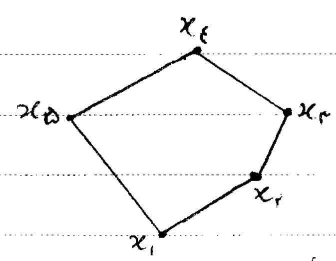
$$S:\begin{cases} x_1-2x_2=5 \\ 2x_1-4x_2=2 \\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases} \quad \text{ولی} \Rightarrow D=\begin{cases} d_1-2d_2=0 \\ 2d_1-4d_2=0 \\ d_1,d_2\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\in D\neq\phi$$

ولی بیکران نیست چون $S=\phi$

محدودیت دوم ضریبی از محدودیت اول

جواب ندارد پس $S=\phi$

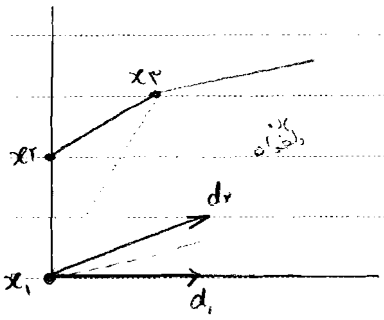
نمایش یک چندوجهی -



حالت کراندار - نظیر حالت چندوجهی محدب است از ترکیب محدب نقاط راسی آن

$$S=\{x \mid x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\lambda_4x_4+\lambda_5x_5\}$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1$$
$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\geqslant 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



حالت بی‌کران - در این حالت هر نقطه عبارت است از ترکیب محدب نقاط راسی به علاوه ترکیب نامنفی جهت‌های راسی دورشونده آن

$$x = y + \mu d$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\mu\mu_1 \geq 0 \quad \text{و} \quad \mu\mu_2 \geq 0$$

قضیه نمایش (حالت کلی)

فرض کنیم $S = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ ، $A \in R_{m\times n}$ ، $b \in R^m$ در این صورت S دارای حداقل یک نقطه راسی است. همچنین تعداد نقاط راسی S متناهی است. مثلاً $x_1, \dots, x_k$

S کراندار است اگر و تنها اگر جهت دورشونده نداشته باشد

اگر S بی‌کران باشد تعداد جهت‌های راسی دورشونده آن متناهی است. مثلاً $d_1, \dots, d_l$

$x \in S$ است اگر و تنها اگر

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, l$$

تعیین شدنی و بهینگی مسئله LP.

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = Cx \\ &\text{s.t } Ax \leq b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض: $S = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \neq \phi$

نمایش $\Rightarrow \text{Min } Z = \sum_{j=1}^{k} (cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{L} (cd_j)\mu_j$

با فرض داشتن تمام نقاط راسی و تمام جهت‌های راسی دورشونده

$$\text{s.t } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, L$$

شرط لازم و کافی برای آنکه مسئله LP از نوع کمینه سازی دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد ($z^* = -\infty$) آن است که:

$$\exists j \ (1 \leq j \leq L) \quad cd_j < 0$$

در نتیجه شرط لازم و کافی برای آنکه مسئله LP از نوع کمینه سازی دارای مقدار بهینه متناهی (جواب بهینه) باشد آن است که:

$$\forall j \ (1 \leq j \leq L) \quad cd_j \geq 0$$

در این حالت فرض کنید:

$$Cx_p = \text{Min}\{Cx_j \mid j = 1, \ldots, k\}, \quad x^* = x_p$$

تعریف جواب پایه‌ای شدنی (تعریف نقطه راسی):

$$\begin{cases} Ax = b & A \in R_{m \times n} \\ x \geq 0 & r(A, b) = r(A) = m \end{cases} \Rightarrow$$ محدودیت زائد ندارد

$\Rightarrow \exists B \in R_{m \times m}$ نامنفرد $\Rightarrow |B| \neq 0, \quad A = (B, N)$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix} \qquad Ax = b \Rightarrow (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$\Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N$

در B^{-1} ضرب می‌کنیم $\longrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$$x_N = 0 \Longrightarrow \quad x_B = B^{-1}b \qquad x^0 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow x_B \\ \leftarrow x_N \end{array}$$

یک جواب پایه‌ای $Ax = b$ است.

اگر $B^{-1}b \geq 0$ باشد آنگاه جواب $x^0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ را یک جواب پایه‌ای شدنی (BFS) دستگاه $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ می‌گوییم.

در این تعریف B را ماتریس پایه، N را ماتریس غیرپایه‌ای، x_B را متغیرهای پایه‌ای (وابسته) و x_N را متغیرهای غیرپایه‌ای (مستقل) می‌گوییم.

همچنین یک BFS را تباهیده گوییم هرگاه یکی از مولفه‌های $x_B = B^{-1}b$ صفر باشد.

در غیر این صورت $(B^{-1}b > 0)$ آن BFS را غیرتباهیده گوییم. درجه تباهیدگی یک BFS تعداد صفرهای متغیرهای پایه‌ای آن (x_B) است.

تفسیر تناظری یک به یک بین BFS های دستگاه $\begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$ و نقاط رأسی چند وجهی (ناتهی)

$S=\{x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$ برقرار است.

m معادله $Ax=b$ از x^0 می‌گذرند $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ x در دستگاه $Ax=b$ صدق می‌کند

n−m معادله از n فضای Z از x^0 می‌گذرند $\Rightarrow$ $x_N=0$

(نکته) $\begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$ $A\in R_{m\times n}$ $b\in \mathbb{R}^m$ $r(A)=m$

$\Rightarrow$ حداکثر تعداد BFS $= C_m^n$

الگوریتم روش سیمپلکس.

$$\text{Min } Z=Cx$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$$

فرض $r(A)=r(A,b)=m$

$\Rightarrow \exists\ x^0=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\in S$ BFS آغازین

$A=(B,N)$ $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $C=(C_B,C_N)$

$$Ax=b \Rightarrow Bx_B+Nx_N=b \xRightarrow{\times B^{-1}} I_m x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \quad (\mathrm{I})$$

$x_B=$ متغیرهای وابسته (پایه)
$x_N=$ متغیرهای مستقل (غیرپایه)

$\underrightarrow{\text{if } x_N=0}$ $\boxed{x_B=B^{-1}b}$

$$Z = Cx = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = C_B x_B + C_N x_N$$

$$Z(x^0) = C_B B^{-1} b \Rightarrow Z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + C_N x_N$$

$$\boxed{Z = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N)}$$

مسئله اصلی $\Rightarrow \quad \text{Min } Z = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N), x_N$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} I_m x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ x_B \geq 0 \ , \ x_N \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Min } Z = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N) x_N$$

$$\text{st} \quad \begin{cases} B^{-1} N x_N \leq B^{-1} b \\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

چون مسئله در فضای m-n بعدی است متغیرها غیرپایه است

$\boxed{B^{-1} b = \bar{b}}$ اندیس متغیرهای غیرپایه‌ای: NBV

$\boxed{Z_0 = C_B B^{-1} b = C_B \bar{b}}$ $\boxed{Z_j = C_B B^{-1} a_j = C_B y_j}$

$\boxed{y_j = B^{-1} a_j}$

$$\text{Min } Z = Z_0 - \sum (Z_j - C_j) x_j$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} x_B + \sum y_j x_j = \bar{b} \\ x_B \geq 0 \ , \ \forall j \in NBV: x_j \geq 0 \end{cases}$$

مثال) $\operatorname{Min} Z = 2x_1 - x_2$ $\xrightarrow{\text{استاندارد}}$ $\operatorname{Min} Z = 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = (2, -1, 0, 0)$$

$$r(A) = r(A, b) = 2$$

$$B_1 = (a_1, a_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad |B_1| = (-1) - (2) = -3 \neq 0$$ پس پایه‌ای است

$$B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \ge \bar{0}$$ پس شدنی است.

$$N = (a_3, a_4), \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad NBV = (3, 4)$$

$$Z_0 = C_B \bar{b} = (2, -1) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} z_3 - c_3 = C_B y_3 - c_3 = (2, -1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - 0 = -\frac{4}{3} \\ z_4 - c_4 = C_B y_4 - c_4 = (2, -1) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

که
$$\begin{cases} y_3 = B_1^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ y_4 = B_1^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = Z_0 - (Z_3 - C_3)x_3 - (Z_4 - C_4)x_4$$

$$\text{s.t: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - y_3 x_3 + y_4 x_4 = \bar{b}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ب)

$$\text{Min } Z = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Min } Z = Z_0 - \sum (z_j - c_j)x_j$$

$$\text{s.t: } x_B + \sum y_j x_j = \bar{b}$$

$$x_B \geq 0 \;,\; \forall j: x_j \geq 0$$

این بیان شرط لازم و کافی بهینگی نقطه راسی نقطه x^0 را در اختیار ما قرار می‌دهد، همچنین در صورت بهینه نبودن، راهی برای بهبود Z پیشنهاد می‌کند.

قضیه: شرط لازم و کافی بهینگی نقطه راسی x^0 برای مسئله مینیمم سازی آن است که،

$$\forall j \in NBV: \; z_j - c_j \leq 0$$

نکته) $\dfrac{\partial Z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)$, $j \in NBV$. if $\forall j \in NBV$ $z_j - c_j \leq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial Z}{\partial x_j} \geq 0$

تابع Z نسبت به افزایش همه غیرپایه‌ای‌ها صعودی است پس افزایش هیچ غیر پایه‌ای از سطح صفر

عملی‌اش برای مسئله مینیمم سازی بهبود دهنده نیست پس $\forall j \in NBV: x_j^* = 0 \rightarrow x_B^* = \bar{b} \Rightarrow x^* = x^0$

حال فرض می‌کنیم x^0 بهینه نباشد: $\exists\, k \in NBV ,\ Z_k - C_k > 0$

افزایش x_k از سطح صفر فعلی‌اش (در صورت امکان) بهبود دهنده است $\Leftarrow$ $\frac{\partial Z}{\partial x_k} = -(\overset{>0}{Z_k - C_k}) < 0$

سوال - حداکثر افزایش x_k چگونه محاسبه می‌شود و این تغییر چه تاثیری در مسأله دارد؟

غیر از x_k سایر متغیرهای غیرپایه‌ای را در سطح صفر نگه می‌داریم $\forall j \in NBV - \{k\} : x_j = 0$

$$\Rightarrow Z = Z_0 - (\overset{>0}{Z_k - C_k})\, x_k$$

$$x_B = b - y_k x_k$$

حالت اول: $y_k = B^{-1} a_k \le 0$: در این حالت هر اندازه افزایش x_k شدنی است. از طرفی Z نسبت به این افزایش نزولی است پس $Z^* \to -\infty$

این حالت یعنی مسئله در انتهای شعاع بی‌کران دارای مقدار بهینه نامتناهی است.

$$\left\{ \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k \;\middle|\; x_k \ge 0 \right\}$$

$$d = \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} , \quad y_k \le 0 \to d \gneq 0 , \quad Ad = (B, N) \begin{bmatrix} -B^{-1} a_k \\ e_k \end{bmatrix} = -BB^{-1} a_k + N e_k = -a_k + a_k = 0$$

$$Cd = (C_B, C_N) \begin{bmatrix} -B^{-1} a_k \\ e_k \end{bmatrix} = -(C_B B^{-1} a_k - C_N e_k) = -(Z_k - C_k) < 0$$

حالت دوم - اگر $y_k = B^{-1} a_k$

$\exists\, i \ ;\ y_{ik} > 0$

$$x_B = b - y_k x_k \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{ik} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

افزایش x_k با کاهش پایه‌های همراه است که متناظر با مولفه‌های مثبت y_k اند. بیشترین افزایش x_k به اندازه‌ای است که اولین پایه‌ی در حال کاهش، به صفر برسد. این افزایش از تست مینیمم نسبت $\frac{b_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} ; y_{ik} > 0 \right\}$ بدست می‌آید.

مختصات BFS جدید

$$\begin{cases} (x_{B_i})_{new} = b_i - y_{ik} \left(\frac{b_r}{y_{rk}} \right) \\ (x_k)_{new} = \frac{b_r}{y_{rk}} \\ (x_i)_{new} = 0 \end{cases}$$

توجه داریم که تست مینیمم نسبت، در اندیس r ام رخ داده پس

$i = r \longrightarrow (x_{B_r})_{new} = b_r - y_{rk} \left(\frac{b_r}{y_{rk}} \right) = 0$

به عبارت دیگر x_k وارد پایه می‌شود و x_{B_r} (متناظر با تست مینیمم نسبت) پایه را ترک می‌کند.

$$B_{old} = (a_{B_1} \cdots a_{B_r} \cdots a_{B_m})$$

$$B_{new} = (a_{B_1} \cdots a_k \cdots a_{B_m})$$

حرکت روی یال بین دو نقطه رأسی قبلی و فعلی انجام می‌شود.

معادله یال حرکت:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k \;\middle|\; 0 \le x_k \le \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \right\}$$

تغییر تابع هدف:

$$Z_{new} = Z_0 - (Z_k - C_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \Rightarrow Z_{new} \le Z_0$$

یعنی تابع هدف در هر تکرار سیمپلکس نزولی است (غیر افزایشی است) و هر پایه حداکثر یک بار ملاقات می‌شود و تعداد پایه‌ها متناهی است. بنابراین اگر مسئله دارای مقدار بهینه متناهی باشد، در تعداد متناهی بار تکرار، جواب (پایه) بهینه را تولید می‌کند. (همگرایی متناهی)

جدول سیمپلکس -

	x_B	x_N	RHS	
	$\bar{0}$	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$	سطر صفر
x_B	I_m	$B^{-1} N$	$\bar{b}$	

مشخصه جدول سیمپلکس -

۱- متغیرهای اساسی در تابع هدف ضریب صفر دارند.

۲- متغیرهای اساسی در محدودیت‌ها، ضریب ماتریس همانی دارند.

- اگر نقطه رأسی فعلی بهینه باشد آنگاه: $min \rightarrow z_j - c_j \leq 0$

$max \rightarrow z_j - c_j \geq 0$

که این مقادیر $z_j - c_j$ زیر بردار در سطر صفر قرار دارند.

- اگر x_B بهینه نباشد آنگاه: $\exists\ k \in NBV\ ;\ z_k - c_k > 0$

x_k وارد شونده است اگر $y_k \leq 0$ (y_k ستون زیر x_k در سطرهای 1 تا m است) توقف...

مسئله دارای مقدار بهینه نامتناهی است...

- در غیر این صورت ($y_k \nleq 0$) x_k اندیس متغیر خارج شونده از پایه در طول گام توسط تست مینیمم نسبت

انجام می‌شود. این تست نیازمند دو ستون b و y_k است که هر دو در جدول وجود دارند: $min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_r}{y_{rk}}$

- انجام یک تکرار سیمپلکس معادل است با ورود x_k به پایه، خارج شدن x_{B_r} و به هنگام کردن مقادیر.

نکته - این محاسبات را روی جدول می‌توان با عمل محور (محورگیری) روی عنصر محوری (پاشنه یا لولا) y_{rk} به صورت زیر انجام داد:

سطر rام را بر $y_{rk} > 0$ تقسیم کند.

Subject: Year. Month. Date. ( )

حل) $Max\ Z = x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$\begin{aligned} S.t \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	1	-4	0	0	0	
x_4	1	1	2	1	0	0	9
x_5	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	-1	1	1	0	0	1	4

$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\min\left\{ \frac{9}{2}, \frac{4}{1} \right\} = 4$

$B_1 = \{a_4, a_5, a_6\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	-3	5	0	0	0	4	16
← x_4	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	2	0	0	1	0	6
x_3	-1	1	1	0	0	1	4

$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\min\left\{ \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	4	0	1	0	3	17
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

جدول بهینه

$Max: \forall j,\ Z_j - C_j \geq 0$

پایه بهینه $B_3 = (a_1, a_5, a_3)$ $x^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{13}{3} \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ $Z^* = 17$

مقدار بهینه نامتناهی

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	۰	۰	-۲	۲	۵
x_1	۱	۰	۲	-۵	۴
x_2	۰	۱	-۱	-۴	۱

$z_4 - c_4 > 0$ و $y_4 \leq 0$

مسئله دارای مقدار بهینه نامتناهی است

یعنی ستون مینیمم برای متغیر ورودی تمام منفی است ($z^* \to -\infty$)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \;\middle|\; x_4 \geq 0 \right\}$$

در راستای بردار جهت دورشونده بهبود می‌دهد

$$\begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_4 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

شرط لازم برای چندگانگی

جواب بهینه چندگانه

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	۰	۰	-۳	-۱	۰	-۱۰
x_1	۱	۰	۱	۲	۱	۲
x_2	۰	۱	-۱	۲	$\frac{1}{3}$	۱

$z^* = -10$ $\quad x^{*(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ مثال ۱)

$$\frac{\partial z}{\partial x_5} = -(z_5 - c_5) = 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	۰	۰	-۳	-۱	۰	-۱۰
x_5	۱	۰	۱	۲	۱	۲
x_1	$-\frac{1}{3}$	۱	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$

$$x^{*2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مجموعه جواب‌های بهینه $= \left\{ \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$

مثال ۲)

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	0	-1	0	-10
x_1	1	0	2	-2	2
x_2	0	1	1	0	1

$z^* = -10$ $\quad x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0 \quad y_4 \le 0$

مسئله دارای شعاع بهینه است.

$$R^* = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \;\middle|\; x_4 \ge 0 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -y_4 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

مثال ۳)

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	0	-1	0	-10
x_1	1	0	2	2	0
x_2	0	1	1	-1	4

$z^* = -10$ $\quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$

$\min\left\{ \frac{0}{2}, \frac{4}{1} \right\} = 0 \longrightarrow$ چندگانه نیست

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$ نمی‌توان افزایش داد

نکته- برای داشتن جواب بهینه چندگانه در جدول سیمپلکس بهینه می‌بایست حداقل یکی از غیرپایه‌ای‌ها سود نسبی یا $z_j - c_j$ برابر صفر داشته باشد و در صورت انتخاب آن متغیر به عنوان وارد شونده طول گام صفر نشود (یعنی یا تست مینیمم انجام نشود (مثال ۲) که در این صورت شعاع بهینه وجود دارد یا اینکه تست مینیمم صفر نشود.

استخراج برخی نرخ‌های تغییرات از جدول سیمپلکس:

تابع هدف -
$$Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (Z_j - C_j) x_j$$

$$j \in NBV: \frac{\partial Z}{\partial x_j} = -(Z_j - C_j)$$

$$W_{1\times m} = C_B B^{-1}$$ W: بردار ضرایب سیمپلکس

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = w_i = [C_B B^{-1}]_j$$

W در دو حالت از جدول قابل استخراج است:
$$a^i x \leq b_i \xrightarrow{\text{استاندارد}} a^i x + x_{n+i} = b_i$$
متغیر کمکی

$$\text{I} \quad Z_{n+i} - C_{n+i} = C_B B^{-1} a_{n+i} - C_{n+i} = W e_i - 0 = w_i$$

$$a^i x \geq b_i \longrightarrow a^i x - x_{n+i} = b_i$$

$$\text{II} \quad Z_{n+i} - C_{n+i} = W(-e_i) - 0 = -w_i \Rightarrow w_i = -[Z_{n+i} - C_{n+i}]$$

محدودیت‌ها -
$$x_B = B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} y_j x_j$$

$$j \in NBV: \frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -y_j \Rightarrow \frac{\partial (x_B)_i}{\partial x_j} = -y_{ij}$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial b_j} = B_j^{-1} \qquad \frac{\partial (x_B)_i}{\partial b_j} = B_{ij}^{-1} \qquad \frac{\partial x_B}{\partial b} = B^{-1}$$

اگر ماتریس مسئله استاندارد شده دارای زیرماتریس همانی باشد در هر تکرار B^{-1} آن تکرار و جای همانی اولیه درج شده است!

نکته – در جدول بهینه $W^* = C_B B^{-1}$ را قیمت های سایه (shadow prices) می گوییم

مثال –

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17
x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -(z_2 - c_2) = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_4} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_6} = 2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial b_1} = w_1 = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial b_2} = w_2 = 0 \qquad w^* = (-1, 0, -2) \\ \frac{\partial z}{\partial b_3} = w_3 = -2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -y_j ; \qquad \frac{\partial x_B}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_B)_1}{\partial x_2} = -y_{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial x_5}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_B)_2}{\partial x_2} = -y_{22} = -2 \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_B)_3}{\partial x_2} = -y_{32} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

تباهیدگی -

- یک چندوجهی را تباهیده گوییم هرگاه حداقل یک نقطه رأسی تباهیده داشته باشد.

- نقطه رأسی تباهیده نقطه‌ای است که بیش از یک دسته n تایی از صفحه مستقل خطی تعریف کننده ناحیه از آن نقطه بگذرد.

- در سیستم $\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}$ یک BFS تباهیده، حداقل یک مولفه پایه‌ای برابر صفر دارد.

- اگر تباهیدگی ناشی از خود دستگاه $Ax=b$ نباشد، آنگاه متناظر با BFS تباهیده سیستم $\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}$ بیش از یک پایه شدنی وجود دارد.

جواب بهینه رأسی - جوابی است که حداقل یک پایه متناظر آن بهینه باشد.

$$\exists B, \; x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \; \text{و} \; \forall j \quad z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0$$

پس روش سیمپلکس به دنبال پایه بهینه است.

	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	RHS
	۰	۰	۱	−۳	−۲
$\leftarrow x_1$	۱	۰	۱	−۱	۰
x_2	۰	۱	−۱	۲	۴

$\xrightarrow[\text{تکرار تباهیده}]{\text{طول گام صفر}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	−۱	۰	۰	−۲	−۲
x_3	۱	۰	۱	−۱	۰
x_2	۱	۱	۰	۱	۴

$B_1 = (a_1, a_2)$ بهینه نیست

$B_2 = (a_3, a_2)$ بهینه است

- اگر در یک جدول تست مینیمم نسبت در بیش از یک اندیس رخ دهد، پاسخ (نقطه) بعدی تباهیده است!

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	0	1	-2	
$\leftarrow x_1$	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1

حتماً تباهیده است $\longrightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{\frac{1}{2}}\right\} = \min\{2, 2\}$$

در جدول اول x_4 یک جهت دورشونده است $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ ولی ما در یک جهت دیگر حرکت می‌کنیم (x_3)

- اگر نقطه رأسی فعلی تباهیده و غیر بهینه باشد، آیا تکرار بعدی تباهیده است؟ خیر، چون ممکن است در تست مینیمم شرکت نکند، پس الزاماً در نسبت، مگر آنکه طول گام صفر شود.

ص ۱۲۲ / س ۱۴

$$\text{Max } Cx$$
$$\text{s.t. } x \in X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$
$$A \in R_{m \times n} \quad r(A) = m$$

الف) در یک جدول سیمپلکس، اگر به ازای متغیر غیرپایه x_j ، $z_j - c_j = -7$ وارد پایه شود و مقدار تست مینیمم نسبت در متغیرگیری مربوط ۳ است، مقدار تغییر تابع هدف چقدر است؟

$\exists j \in NBV \qquad z_j - c_j = -7$

طول گام $\theta_j = 3 \Rightarrow \Delta z = ?$

$\Delta z = -(z_j - c_j)\theta_j = -(-7)(3) = 21$

ب - اگر یک نقطه راسی تبهگن باشد، آیا امکان دارد تمام $z_j - c_j$ ها در پایه مربوط بزرگتر از صفر یا مساوی صفر نشود؟ بله، ممکن است پایه فعلی پایه تبهگن نباشد.

ج - اگر یک d وجود داشته باشد به طوری که $Ad=0$، $d \geq 0$ و $d \neq 0$، $cd<0$ آیا مقدار بهینه نامتناهی است؟

بطور مثال
$$D = \begin{cases} d_1 - 2d_2 = 0 \\ 2d_1 - 4d_2 = 0 \\ d_1, d_2 \geq 0 \end{cases} \qquad S \neq \varnothing \Rightarrow r(A,b) = r(A)$$
نقض نمایش

نه الزاماً، مگر آنکه S تهی نباشد.

د - $\bar{x}$ را یک جواب شدنی دقیقاً m مولفه مثبت بگیرید آیا $\bar{x}$ لزوماً یک نقطه راسی X است؟ نه الزاماً

مثال)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad B = (a_1, a_2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = 0$$
وابسته خطی اند

$$\bar{x} = (1, 1, 0, 0)$$

تعریف صوری از نقطه راسی: $\bar{x}$ را یک نقطه راسی دستگاه $Ax=b$ گوییم، اگر تنها و اگر ستون های متناظر با مولفه های مخالف صفر $\bar{x}$ از A، مجموعه ای مستقل خطی باشد.

ه - اگر یک متغیر غیر پایه x_k در بهینگی دارای $z_k - c_k = 0$ باشد: آیا می توان ادعا کرد جواب های بهینه دیگری وجود دارد؟

به شرط آنکه با انتخاب x_k به عنوان وارد شونده، طول گام صفر نباشد.

irmgn.ir

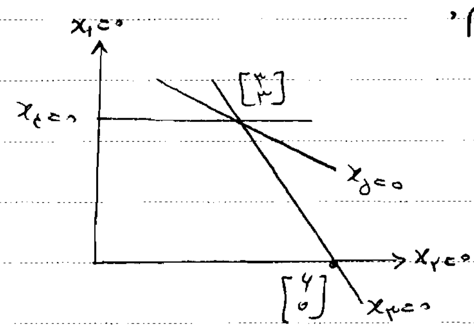
Subject:

Year. Month. Date. ( )

ه- اگر x_1 و x_2 نقاط مجاور و B_1 و B_2 به ترتیب پایه‌های متناظر باشند آنگاه این پایه‌ها نیز مجاور هستند. درست است یا غلط؟ جواب درست است مگر در صورت تبهگن.

دو پایه مجاور تنها در یک ستون اختلاف دارند.

نقاط راسی متناظر با ۲ پایه مجاور را نقاط راسی مجاور می‌گوییم.



$B_1=(a_1, a_2, a_3)$

$B_2=(a_1, a_2, a_4)$

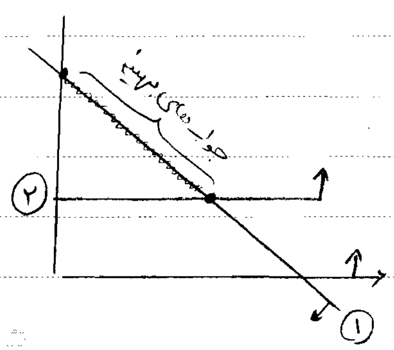
$B_3=(a_1, a_2, a_5)$

دو نقطه مجاورند هرگاه دارای حداقل یک زوج پایه مجاور باشند.

ز- آیا ممکن است یک جواب بهینه بیش از m متغیر مثبت داشته باشد؟ اگر بهینه چندگانه داشته باشیم هر بهینه غیر راسی این خاصیت را خواهد داشت.

مثال)

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1+x_2 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} x_1+x_2 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Max } x_1+x_2 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 4 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$z^*=4$ مثلاً $x^* \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $m=2$

ح- فرض کنید $n=m+1$ ، کم‌ترین کران بالای تعداد نقاط راسی و پایه شدنی چقدر است؟

$C^{m+1}_{m} = m+1$

ط- یک چندوجهی P بعدی می‌تواند حداکثر P جهت راسی داشته باشد. درست است یا غلط؟

فقط اگر $p=2$ باشد، درست است.

ی- فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه راسی با $(m-1)$ مولفه مثبت باشد، آن گاه $(p+1)$ پایه که در آن $p=n-m$ متناظر با این نقطه راسی وجود دارد. درست است یا غلط؟ (فرض کنید $Ax=b$ نتیجه نمی‌دهد هیچ یک از متغیرها ثابت است) توضیح دهید.

حداکثر $(n-m+1)$ پایه متناظر وجود دارد، چون ممکن است یک ستون وابستگی خطی با پایه را داشته باشد.

$\bar{x} : (a_1, \dots, a_{m-1}, 0, \dots, 0)$ $\quad A:(a_1, \dots, a_n)$

$N:(a_{m+1}, \dots, a_n)$

$n-m$ ستون

- گام آغازین روش سیمپلکس

$$\text{Min } Z = Cx$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- آیا مسئله دارای BFS است؟

اگر جواب مثبت است چگونه بیابیم؟

اگر جواب منفی است ($S = \emptyset$) چگونه متوجه بشویم؟

حالت مطلوب $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{استاندارد}} \begin{cases} Ax + I_m \overset{\text{کمکی‌ها}}{x_s} = b \\ x \geq 0 , \; x_s \geq 0 \end{cases}$ $\quad A = (A , I_m)$

$$\text{if } B = I_m , \; |B| \neq 0 , \; B^{-1} b = b \geq 0$$

پایه آغازین همانی متشکل از متغیرهای کمکی است.

حالت مطلوب ـ در ماتریس پایه واضحی شکل همانی در مسئله استاندارد شده وجود دارد.

مثال) $S = \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_I : \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow S_{II} : \begin{cases} Ax + I_m \overset{\text{متغیرهای مصنوعی}}{x_a} \\ x \geq 0 , \; x_a \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} \in S_I \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{bmatrix} \in S_{II}$$

از شکل قبل
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

ضرایب $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x_5 \geq 0 \longrightarrow x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 2$ $\qquad B = (a_5, a_4) = I_2$

نکات مهم: راه‌اندازی سیمپلکس روی ناحیه شدنی S_{II} با انتخاب پایه همانی مربوط به مصنوعی‌ها ساده است.

برای رسیدن به S_I باید نقاطی از S_{II} با $x_a = 0$ بیابیم.

دو روش عمده برای به صفر رساندن مصنوعی‌ها:
- روش دوفازی (دو مرحله‌ای)
- روش جریمه‌ای M بزرگ

روش دوفازی -

LP $\quad \text{Min } Z = Cx$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

phase I: $\quad \text{Min } x_0 = \mathbf{1} \cdot x_a = \sum_{i=1}^{m} (x_a)_i$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax + I_m x_a = b \\ x \geq 0, \ x_a \geq 0 \end{cases} \qquad \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$$

مسئله فاز I همواره دارای مقدار بهینه متناهی است. به عبارت دیگر ناحیه شدنی، جهت دور شونده بهبود دهنده ندارد.

مسئله فاز I را با پایه‌های همانی مربوط به مصنوعی‌ها حل می‌کنیم. در بهینگی:

حالت اول: $x_0^* > 0$ در این حالت $S_p = \emptyset$ توقف می‌کنیم.

حالت دوم: $x_0^* = 0$ در این حالت تمام مصنوعی‌ها در سطح صفرند. پس می‌توان فرض کرد، تمام مصنوعی‌ها غیرپایه‌ای‌اند، یعنی پایه متشکل از متغیرهای اصلی است. در این حالت حل مسئله اصلی را در فاز دوم با این پایه، و نیز حذف مصنوعی‌ها از جدول ادامه می‌کنیم.

Phase II : $\quad Min \ z = C_B x_B + C_N x_N$

$$s.t: \begin{cases} I_m x_B + B^{-1} N x_N = \bar{b} \\ x_B \geq 0 \ , \ x_N \geq 0 \end{cases}$$

مثال) $Min \ z = x_1 - 2x_2$ $\qquad$ phase I: $Min \ z_0 = x_6 + x_7$

$$s.t: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow s.t: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z_0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

چون x_6 و x_7 پایه‌اند، مقادیر سطر ای مربوط به آنها باید صفر باشد، با عملیات سطری مقادیر آنها را صفر می‌کنیم

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z_0	۰	۲	-۱	-۱	۰	۰	۰	۳
x_6	۱	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۲
← x_7	-۱	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۱
x_5	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۳

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سطر ۱ و ۲ را با سطر صفر جمع می‌کنیم تا $z_6-c_6=z_7-c_7=0$
جدول بهینه نیست، مانند قبل به روش سیمپلکس عمل می‌کنیم

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۲	۰	-۱	۱	۰	۰	-۲	۱
x_6	۲	۰	-۱	۱	۰	۱	-۱	۱
x_2	-۱	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۱
x_5	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-۱	۲

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و باز مانند روش سیمپلکس ادامه می‌دهیم تا به جدول بهینه برسیم

در انتهای فاز اول: جدول فاز اول بهینه است

- مصنوعی با مقدار مثبت پایه‌ای است $\Leftarrow$ $x_0^* > 0$ پس $S_1 = \emptyset$

- مصنوعی‌ها همگی غیرپایه‌ای اند پس $x_0^* = 0$ و پایه بهینه متشکل از متغیرهای اصلی است که به مرحله دوم می‌رویم.

- مصنوعی‌های پایه‌ای با مقدار صفر اند که باز هم $x_0^* = 0$ است. دو وضعیت خواهیم داشت:

۱) در سطر متغیر مصنوعی که با مقدار صفر پایه‌ای است، حداقل یک متغیر اصلی ضریب ناصفر دارد. می‌توان آن اصلی را وارد کرد و با یک محورگیری تبهگن، مصنوعی را حذف کرد.

۲- در سطر متغیر مصنوعی که با مقدار صفر پایه‌ای است، هیچ متغیر اصلی ضریب ناصفر ندارد. در این حالت قید مربوط زائد است و می‌توان آن را حذف کرد.

مثال ۴-۵ صفحه ۱۴۴ کتاب مطالعه شود.

(مثال

	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	RHS
	0	0	-1	0	-2	0
x_1	1	0	2	0	2	2
x_2	0	1	3	0	-1	4
← x_4	0	1	-2	1	1	0

ضریب x_3 متناظر با پایه x_4 منفی است. وارد شونده x_3 و خارج شونده x_4 است.

$B=(a_1, a_2, a_3)$ پایه بعدی

روش M بزرگ

$$P:\ \text{Min } Z = Cx \qquad \text{s.t} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(M):\ \text{Min } Cx + M\sum (x_a)_i \qquad \text{s.t} \begin{cases} Ax + I_m x_a = b \\ x \geq 0,\ x_a \geq 0 \end{cases}$$

$$P:\ \text{Max } Cx \qquad \text{s.t} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(M):\ \text{Max } Cx - M\sum (x_a)_i \qquad \text{s.t} \begin{cases} Ax + I_m x_a = b \\ x \geq 0,\ x_a \geq 0 \end{cases}$$

پایه همانی متشکل از متغیرهای مصنوعی را به ازای $P(M)$ استفاده می‌کنیم. حالات زیر بوجود می‌آید:

I مقدار بهینه متناهی ← $\begin{bmatrix} x^* \\ x_a^* \end{bmatrix}$ جواب بهینه مسئله $P(M)$ است که در این صورت داریم

الف) $x_a^* = 0$ ← مسئله P هم دارای همان مقدار بهینه متناهی است با جواب x^*

ب) $x_a^* \neq 0$ ← $S_p = \emptyset$

II مقدار بهینه نامتناهی ← $P(M)$ دارای مقدار بهینه نامتناهی است که در این صورت داریم.

ج) $x_a = 0$ ← مسئله P هم دارای مقدار بهینه نامتناهی است.

د) $x_a \neq 0$ ← $S_p = \Phi$

نکته ـ برای حالت ج و د بایستی قانون دنزیگ (مثبت‌ترین یا منفی‌ترین) در انتخاب وارد شونده رعایت شود. (۱)

نکته ـ مصنوعی های صفر یعنی بهینه به ناحیه شدنی مسئله اصلی

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	2	0	1	$-M-2$	$-M-1$	-3
x_1	1	-1	0	-1	2	1	3
x_3	0	0	1	-1	1	1	2

$$d = \begin{bmatrix} -y_2 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یک جهت دور شونده و بهبود دهنده مسئله اصلی است

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	3	$1-M$	$-M$	-1	0	
x_1	1	-1	-1	0	1	0	1
x_2	0	0	-1	-1	1	1	3

$(z_2 - c_2 > 0$ و $y_2 \leq 0)$ و $x_a = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq 0$

$S_p = \Phi$

مسئله $P(M)$ دارای مقدار بهینه نامتناهی است.

مثال خاص -

P: Min $-2x_1 - 2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

P(M): Min $-2x_1 - 2x_2 + Mx_5$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	2	2	0	0	$-M$	
x_5	1	0	-1	0	1	2
x_4	2	-5	0	1	0	10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	$2+M$	2	$-M$	0	0	$2M$
x_5	1	0	-1	0	1	2
x_4	2	-5	0	1	0	10

($y_2 \leq 0$ و $z_2 - c_2 > 0$) $\Leftarrow$ P(M) دارای مقدار بهینه نامتناهی است.

$x_5 \neq 0 \Rightarrow S_P = \Phi$ غلط است $\Leftarrow$ نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in S_P \neq \Phi$ در مسئله اصلی صدق می‌کند

باید در مسئله M بزرگ حتماً معیار دنزیگ رعایت شود در غیر اینصورت ممکن است در نتیجه‌گیری برای P درست قضاوت نکنیم.

- M چقدر باید بزرگ باشد؟ باید M به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شود که بین دو BFS یکی با مصنوعی‌های صفر و دیگری با مصنوعی‌های مثبت، BFS اول از نظر تابع هدف بهتر باشد.

مثال) P: Min x_1

$$\text{s.t.}\begin{cases} \varepsilon x_1 - x_2 \geq \varepsilon \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

P(M): Min $x_1 + Mx_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \varepsilon x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \varepsilon \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

دو BFS از M بزرگ $\Rightarrow \bar{x} = (1,0,0,0)$ و $\hat{x} = (0,0,0,\varepsilon)$ $\quad c\bar{x} < c\hat{x} \Rightarrow 1 < M\varepsilon \Rightarrow M > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

تک متغیر مصنوعی -

B یک پایه شدنی است $\exists B, |B| \neq 0$ if $b \geq 0$

if $\exists i$, $b_i < 0$

$$\text{Min } z = C_B x_B + C_N x_N$$
$$\text{s.t} \begin{cases} I_m x_B + B^{-1} N x_N = b & b \geq 0 \\ x_B \geq 0 \ , \ x_N \geq 0 \end{cases}$$

$$(y_a)_i = \begin{cases} -1 & b_i < 0 \\ 0 & b_i \geq 0 \end{cases}$$ و x_a متغیر مصنوعی

در این صورت اگر x_a پایه‌ای شود می‌تواند یک پایه شدنی بسازد

متغیر خارج شونده - x_{B_r} را خارج می‌کنیم که: $b_r = \text{Min}\{b_i\}$

مثال ۴-۱۰ صفحه ۱۵۶ کتاب - مطالعه شود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تباهیدگی و دوراُفتادگی.

درخلال اجرای عملیات محوری تباهیده، اگر دنباله‌ای از پایه‌های غیر بهینه تولید شوند مانند B_1 و .... و B_k که $B_1 = B_k$ اصطلاحاً می‌گوییم مسئله به دور افتاده است.

مثال ٤-١١ صفحه ١٥٨ مطالعه شود.

قواعد جلوگیری از دوراُفتادگی
١- قاعده Bland
٢- قاعده نسبت قاموسی (لکزیکوگرافیک یا لکزیکوگرافی)

قاعده Bland - اگر در انتخاب متغیرهای واردشونده و خارج‌شونده چندگانگی رخ دهد، همواره متغیر کوچکتر (با اندیس کمتر) را انتخاب می‌کنیم، آنگاه دوراُفتادگی رخ نخواهد داد.

ص ۱۷۲ / ص ۳۸۰ - نکته - اگر متغیر خارج‌شونده حاصل از تست مینیمم نسبت یکتا باشد، آنگاه حتی در حضور تباهیدگی هم مسئله به دور نخواهد افتاد.

روش نسبت قاموسی - فرض کنیم در تست مینیمم نسبت خارج‌شونده چندگانه باشد، در این صورت به جای ستون سمت راست از ستون اول B^{-1} در سطرهای مربوط به خارج‌شونده‌های کاندید را تست مینیمم نسبت می‌گیریم، اگر خارج‌شونده یکتا نشد این کار را با ستون‌های دیگر B^{-1} در سطرهای مربوط به کاندیداهای خروج تکرار می‌کنیم. قطعاً قبل از رسیدن به ستون آخر B^{-1} این چندگانگی برطرف خواهد شد و این نحوه انتخاب از دوراُفتادگی جلوگیری می‌کند.

مسئله کوله پشتی -

$$\text{Max } c_1x_1+\dots+c_nx_n$$
$$\text{s.t} \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \\ x_1,\dots,x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{c_k}{a_k} = \text{Max}\left\{\frac{c_j}{a_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\} \quad a_kx_k^* = b \Rightarrow \begin{cases} x_k^* = \dfrac{b}{a_k} \\ x_j^* = 0 \quad \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow Z^* = c_k\frac{b}{a_k}$$

ص ۲۲۳ / س ۱۶)

$$\text{Max } 2x_1+3x_2+8x_3+x_4+5x_5$$
$$\text{s.t} \begin{cases} 3x_1+5x_2+11x_3+2x_4+7x_5 \leq 10 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

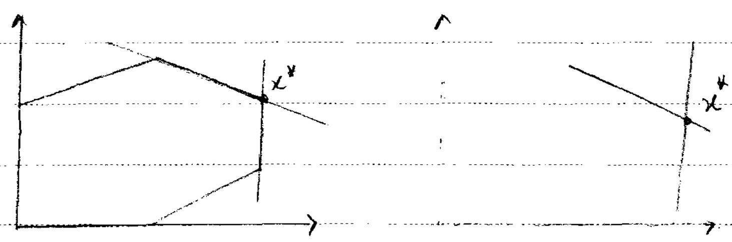
$$\text{Max}\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right\} = \frac{8}{11}$$

$$11x_3^* = 10 \Rightarrow x_3^* = \frac{10}{11}, \quad x_j^* = 0 \quad \text{o.w} \Rightarrow Z^* = 8\left(\frac{10}{11}\right) = \frac{80}{11}$$

ص ۲۲۹ / س ۴۳)

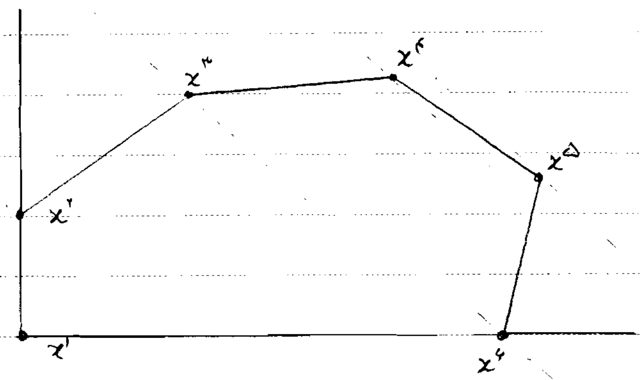
$$P: \text{Min } Cx$$
$$\text{s.t} \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از حل}} \begin{cases} A_1x^* = b_1 \\ A_2x^* \geq b_2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$P': \text{Min } Cx$$
$$\text{s.t} \begin{cases} A_1x \geq b_1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



می‌توان نشان داد x^* جواب بهینه مسئله P' هم هست.

رتبه بندی نقاط راسی -



$Max \to x^*: x^5$

$$Z: cx^1 < cx^2 < cx^3 < cx^4 < cx^6 < cx^5$$

$Min \to x^*: x^1$

نتیجه - همواره نقاط با رتبه های اول و دوم مجاورند.

همواره در رتبه ابتدا و انتهای لیست نقاط راسی مجاورند.

(مثال خاص) $Min\ (Max)\ \ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3$

$$s.t.\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$B = (a_1, a_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|B| = -1$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	RHS
Z	0	0	0	8
x_1	1	0	0	0
x_3	0	-1	1	2

$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$z_2 - c_2 = (3,4)\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 = 0$

$c_B b = (3,4)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$

در جدول بهینه Max, Min:

تابع هدف برنامه مقداری ثابت است پس هر نقطه از فضای جواب بهینه است!

شرط ثابت بودن تابع هدف برنامه $\Leftarrow \exists\ \bar{w}\ ;\ \bar{w}A = c \to r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} = r(A)$

بردار c ترکیبی از سطرهای A باشد.

$$\forall x \in S:\ cx = \bar{w}\underbrace{Ax}_{b} = \bar{w}b$$

دوآلیتی (دوگان) ـ

ایده ـ یافتن کرانی برای مسئله اولیه برمبنای اطلاعات مسئله اولیه

$$P:\ \operatorname{Min}\ Cx \quad \text{s.t}\ \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D:\ \operatorname{Max}\ wb \quad \text{s.t}\ \begin{cases} wA \leq C \\ w \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{w} \in S_D,\ x \in S_P \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\times\, \bar{w} \geq 0} \bar{w}Ax \geq \bar{w}b \\ \begin{cases} \bar{w}A \leq C \\ \bar{w} \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\times\, x \geq 0} \bar{w}Ax \leq Cx \end{cases} \Rightarrow \bar{w}b \leq Cx \quad \max \leq \min$$

دوآل مسائل کانونی $\Leftarrow$

$$P:\ \operatorname{Min}\ Cx \quad \text{s.t}\ \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D:\ \operatorname{Max}\ wb \quad \text{s.t}\ \begin{cases} wA \leq C \\ w \geq 0 \end{cases}$$

دوآل مسائل استاندارد $\Leftarrow$

$$P:\ \operatorname{Min}\ Cx \quad \text{s.t}\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D:\ \operatorname{Max}\ wb \quad \text{s.t}\ \begin{cases} wA \leq C \\ w\ \text{آزاد} \end{cases}$$

مثال)

$$\begin{aligned} \operatorname{Max}\ & -۲x_1 + ۳x_2 + ٤x_3 \\ \text{s.t}\ & x_1 + x_2 + ۵x_3 \leq ۵ \quad w_1 \\ & ۲x_1 - x_2 \leq -۱ \quad w_1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{Min}\ & ۵w_1 - w_2 \\ \text{s.t}\ & w_1 + ۲w_2 \geq -۲ \\ & w_1 - w_2 \geq ۳ \\ & ۵w_1 \geq ٤ \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل ترکیبی -

$$\text{Max } c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \qquad\qquad \text{Min } w_1b_1+w_2b_2+w_3b_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} A_{11}x_1+A_{12}x_2+A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1+A_{32}x_2+A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \leq 0 ,\ x_2 \text{ آزاد و } x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{s.t.}\begin{cases} w_1A_{11}+w_2A_{21}+w_3A_{31} \leq c_1 \\ w_1A_{12}+w_2A_{22}+w_3A_{32} = c_2 \\ w_1A_{13}+w_2A_{23}+w_3A_{33} \geq c_3 \\ w_1 \leq 0 ,\ w_2 \text{ آزاد و } w_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال)

$$\text{Max } -2x_1+3x_2+5x_3 \qquad\qquad \text{Min } 5w_1+4w_2+6w_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3+x_4 \geq 5 & w_1 \\ 2x_1 + x_3 = 4 & w_2 \\ -2x_2+x_3+x_4 \leq 6 & w_3 \\ x_1 \leq 0 ,\ x_2,x_3 \geq 0 \text{ و } x_4 \text{ آزاد} \end{cases} \qquad \text{s.t.}\begin{cases} -2w_1+2w_2 \leq -2 \\ w_1 - 2w_3 \geq 3 \\ 3w_1+w_2+w_3 \geq 5 \\ w_1 + w_3 = 0 \end{cases}$$

قضایای دوآلیتی (ارتباط بین مسائل اولیه و ثانویه)

قضیه ۱ - دوآل دوآل، همان پرایمال است.

قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوآلیتی) - مقدار تابع هدف مسئله از نوع مینیمم‌سازی به ازای هر جواب شدنی آن همواره بزرگتر یا مساوی مقدار تابع هدف مسئله ثانویه (از نوع ماکسیمم‌سازی) است آن هم به ازای هر جواب شدنی مسئله ثانویه. $\text{Max} \leq \text{Min}$

نتیجه ۱- اگر $x_0 \in S_p$ و $w_0 \in S_D$ به گونه‌ای باشند که $w_0 b = c x_0$ در این صورت w_0 , x_0

جواب‌های بهینه مسائل P و D اند.

نتیجه ۲- اگر یکی از مسائل P یا D دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد مسئله دیگر نشدنی است.

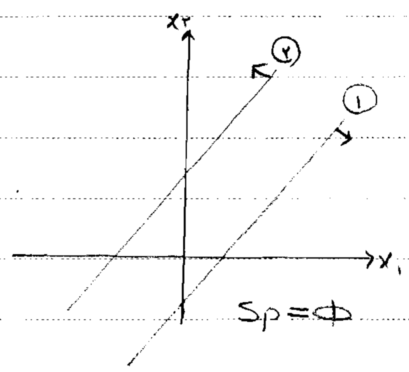
** مثال زیر نشان می‌دهد عکس نتیجه ۲ الزاماً درست نیست.

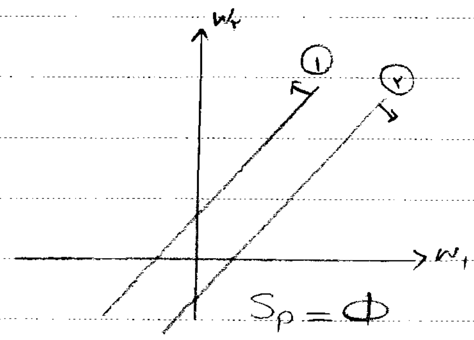
$$P:\ \mathrm{Min}\ -x_1 - x_2 \qquad\qquad D:\ \mathrm{Max}\ w_1 + w_2$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1 - x_2 \geq 1 \qquad\qquad \text{s.t.}\ \ w_1 - w_2 \leq -1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1 \qquad\qquad -w_1 + w_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad w_1, w_2 \geq 0$$





قضیه ۳ (قضیه قوی دوگانی) - اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه دارای جواب بهینه باشد مسئله دیگر هم دارای جواب بهینه است و در ضمن مقادیر بهینه دو مسئله یکی اند.

اثبات قضیه ۳ برای حالت کانونی -

$$P:\ \mathrm{Min}\ cx \qquad\qquad D:\ \mathrm{Max}\ wb$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{s.t.}\ \begin{cases} wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

فرض کنیم مسئله P دارای جواب بهینه باشد پس دارای جواب بهینه رأسی مثل $x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ است

$$\xrightarrow{\text{استاندارد } P} S_p \begin{cases} Ax - I_m x_s = b \\ x \geq 0 \text{ و } x_s \geq 0 \end{cases} \rightarrow \forall j : C_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0 \Rightarrow \bar{w} = C_B B^{-1}$$

$$x_j \begin{cases} \text{اصلی } x_j \Rightarrow \bar{w} a_j - c_j \leq 0 \text{ و } j = 1, \dots, n \\ \text{کمکی } x_j \Rightarrow \bar{w}(-e_j) - 0 \leq 0 \text{ و } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{w} A - C \leq 0 \\ \bar{w}(-I_m) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{w} A \leq C \\ \bar{w} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{w} \in S_D \neq \phi$$

* نکته * شرط بهینگی مسئله پرایمال همان شدنی بودن مسئله دوآل است.

$$C x^* = (C_B, C_N) \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} b = \bar{w} b$$

پس طبق نتیجه اول قضیه ضعیف: x^* و $\bar{w}$ جواب‌های بهینه مسائل P و D اند.

قضیه اساسی دوآلیتی - برای زوج مسائل اولیه و ثانویه، تنها و تنها یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

الف - هر دو مسئله دارای جواب بهینه اند با مقادیر بهینه یکسان.

ب - یکی از مسائل دارای مقدار بهینه نامتناهی است و مسئله دیگر نشدنی است.

پ - هر دو مسئله نشدنی اند.

شرایط بهینگی K.K.T (karush_kuhn_Tucker)

$$P.\ \mathrm{Min}\ Cx \quad s.t \begin{cases} Ax \geq c \\ x \geq 0 \end{cases}$$

قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه x^* جواب مسئله باشد آن است که برداری w^* یافت شود به طوری که:

I) $Ax^* \geq b \ , \ x^* \geq 0$ (PF)

$$D.\ \mathrm{Max}\ wb \quad s.t \begin{cases} wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

II) $w^*A \leq C \ , \ w^* \geq 0$ (DF)

III) $w^*.(Ax^*-b)=0 \ , \ (C-w^*A).x^*=0$ (C.S) Complementary Slacknes

شرط C.S - حاصلضرب متغیرهای کمکی هر مسئله در متغیرهای دوآل آن صفر است (در بهینگی)

با فرض اینکه این ۳ شرط برقرار باشد:

I) $\Rightarrow x^* \in S_p$

II) $\Rightarrow w^* \in S_D$

III) $\Rightarrow w^*Ax^* - w^*b = 0 \ , \ Cx^* - w^*Ax^* = 0 \Rightarrow w^*b = Cx^*$

طبق نتیجه اول قضیه ضعیف: x^* و w^* به ترتیب جوابهای بهینه مسائل P و D اند.

* از اثبات قضیه K.K.T نتیجه می‌شود:
x^* جواب بهینه مسئله P است اگر و تنها اگر C را بتوان برحسب ترکیب خطی نامنفی ضرایب صفحه‌های فعال در x^* نوشت.

- مثال ۵-۸ صفحه ۲۱۹ مطالعه شود.

شرط CS -

P: $\text{Min } cx$ D: $\text{Max } wb$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a^i x \geq b_i & i=1,\dots,m \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} wa_j \leq c_j & j=1,\dots,n \\ w \geq 0 \end{cases}$$

P جواب بهینه

بازنویسی شرط CS -

$$\begin{cases} w^*_i (a^i x^* - b_i) = 0 & i=1,\dots,m \\ (c_j - w^* a_j) . x^*_j = 0 & j=1,\dots,n \end{cases}$$

D جواب بهینه

P: $\text{Min } cx$ D: $\text{Max } wb$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

I) PF ✓

II) DF → ?

III) CS ✓ $w^*(Ax^* - b) = 0$, $(c - w^* A).x^* = 0$ قضیه مکمل زائد

$$\Rightarrow (c_j - wa_j) x_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^*_j > 0 \Rightarrow w^* a_j = c_j \\ w^* a_j < c_j \Rightarrow x^*_j = 0 \\ w^*_i > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \end{cases} , \quad a^i x^* > b_i \Rightarrow w^*_i = 0$$

$$(c_j - c_B B^{-1} a_j) x_j = 0 \Rightarrow (c_j - z_j) x_j = 0 , \quad j=1,\dots,n$$

$x_j \in BV : c_j - z_j = 0$ * در حالت کلی، اگر متغیری در یک مسئله مثبت باشد، آن وقت محدودیت نظیر در مسئله دیگر باید فعال باشد.

$x_j \in NBV \quad x_j = 0$ * در صورت فعال نبودن یک محدودیت در یک مسئله، متغیر متناظر مسئله دیگر باید صفر شود.

سیمپلکس دوگان (دوآل سیمپلکس)

$$P:\ \operatorname{Min}\ Cx$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \exists B\ ;\ |B| \neq 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0\ (DF)$$

if $B^{-1}b \geq 0 \rightarrow$ B پایه بهینه است

o.w $\exists i$ و $\bar{b}_i < 0 \rightarrow$ B پایه شدنی اولیه نیست

ولی می‌توان حل مسئله اولیه را با روش سیمپلکس دوگان آغاز کرد.

	$x_{B_1} \cdots x_{B_m}$	x_j	x_k	RHS
	$0 \cdots 0 \cdots 0$	$z_j - c_j$	$z_k - c_k$	$c_B \bar{b}$
x_{B_1}	0	y_{1j}	y_{1k}	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow x_{B_r}$	0	y_{rj}	y_{rk}	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	y_{mj}	y_{mk}	$\bar{b}_m$

(DF) $\forall j: z_j - c_j \leq 0$

$\exists i: \bar{b}_i < 0$

ابتدا خارج شونده انتخاب می‌شود (x_{B_r}) $\bar{b}_r = \operatorname{Min}\{\bar{b}_i\} < 0$

وارد شونده از تست مینیمم نسبت زیر انتخاب می‌شود:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \operatorname{Min}\left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right| ,\ y_{rj} < 0 \right\}$$

x_k وارد شونده است و روی $y_{rk} < 0$ محورگیری می‌کنیم.

۱- این محورگیری شدنی بودن دوآل را حفظ می‌کند $(z_j - c_j)_{new} \leq 0$

۲- تابع هدف دارای فرآیند غیرکاهشی است.

این تکرارها تا رسیدن به پایه شدنی اولیه (در خط ۸) یعنی یا به پایه بهینه ادامه می یابد و یا اینکه $b_r < 0$ ولی در خط r همه درایه ها نامنفی می شود $S_p = \phi$ و لذا مسئله دوآل دارای جواب بهینه نامتناهی است. (مسئله P نشدنی است)

* مثال ۶-۷ صفحه ۲۵۶ مطالعه شود.

ارتباط تباهیدگی پرایمال و چندگانگی دوآل -

$$P: \ \text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad D: \ \text{Min } W = 3y_1 + 4y_2 + 10y_3$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 3 \\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} s.t. \quad & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

با حل این مسئله داریم:

$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب بهینه تباهیده است!

$y_1^* = (1, 1, 0)$ و $y_2^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ دوآل دارای بهینه چندگانه است!

* تباهیدگی مسئله پرایمال چندگانگی مسئله D را نشان می دهد.

* به ازای هر پایه بهینه مسئله پرایمال یک جواب بهینه مسئله دوآل وجود دارد و بالعکس.

* شدنی دوگان یعنی شرط بهینگی سیمپلکس $z_j - c_j \ge 0$ به ازای تمام j ها است.

تحلیل حساسیت

$\text{Min } CX$

$$s.t \begin{cases} AX=b \\ X\geq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists B \text{ پایه بهینه است } \Rightarrow \begin{cases} \text{I} \quad B^{-1}b\geq 0 \quad (PF) \\ \text{II} \quad \forall j \quad C_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0 \quad (DF) \end{cases}$$

تغییر در بردار ضرایب هدف (C) -

فرض کنیم x_k در تابع هدف از C_k به C'_k تغییر کند:

حالت اول - C_k در جواب بهینه غیرپایه ای است: این تغییر تنها سود نسبی x_k را عوض می کند.

$$(Z_k - C_k)_{new} = Z_k - C'_k = (Z_k - C_k) + (C_k - C'_k)$$

اگر $(Z_k - C_k)_{new}$ مثبت شد، کاندیدای ورود به پایه است و حل مسئله را با سیمپلکس اولیه دنبال می کنیم

در غیر اینصورت پایه فعلی کماکان بهینه است

نتیجه - در این تغییر مقدار بهینه بهتر می شود.

حالت دوم - x_k در جواب بهینه ، پایه ای است . در این حالت C_B و لذا سود نسبی متغیرها تغییر می کند.

فرض کنیم $x_k = x_{B_r}$ (x_k ، rامین پایه ای باشد)

$$C_k \longrightarrow C'_k \Rightarrow C_B \longrightarrow C'_B = C_B + (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{مولفه } r\text{ام}}}{C'_k - C_k}, \ldots, 0)$$

$$z_j' - c_j' = C_B' y_j - c_j' = (C_B y_j - c_j) + (c_k' - c_k) y_{rj} = (z_j - c_j) + (c_k' - c_k) y_{rj} \quad \text{(I)}$$

$$j \in BV: \; j \neq k \quad z_j' - c_j = 0 + (c_k' - c_k)(\overset{e_k}{0}) = 0$$

$$j = k \quad z_k' - c_k' = 0 + (c_k' - c_k)(1) \Rightarrow z_k' - c_k' = 0$$

پس اگر ضریب هدف یک پایه‌ای عوض شود، ستون پایه‌ای ها تغییر نمی‌کند و صفر می‌ماند.

$$Z_{new} = C_B' \bar{b} = C_B \bar{b} + (c_k' - c_k) \bar{b}_r \quad \text{(II)}$$

از (I), (II): وقتی ضریب یک پایه‌ای در تابع هدف از c_k به c_k' تغییر کند کافی است $c_k' - c_k$ برای غیر پایه‌ای ها و نیز سمت راست تیم ... را به تابع هدف اضافه کنیم. اگر شرط DF نقض شده باشد کاندیدای ورود داریم و با سیمپلکس معمولی دنبال می‌کنیم.

تغییر در بردار منابع (b) -

این تغییر تنها روی شرط I بهینگی تأثیر دارد. برای بررسی این تأثیر $B^{-1}b'$ را بدست می‌آوریم.

اگر $B^{-1}b' \geq 0$، پایه فعلی هنوز بهینه است. در غیر این صورت با سیمپلکس ثانویه حل مسئله را دنبال می‌کنیم.

این تغییر می‌تواند باعث تهی شدن FS (مقدار بهینه یا تباهیدگی مسئله دوآل) شود.

مثال) Min $-2x_1 + x_2 - x_3$ — تغییرات) الف $C_2 = 1 \to -3$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \le 6$ — ب) $C_1 = -2 \to 0$

$-x_1 + 2x_2 \le 4$ — پ) $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

پایه $B = (a_1, a_5)$

الف) x_2 غیرپایه‌ای است

$(Z_2 - C_2)_{new} = Z_2 - C_2' = (Z_2 - C_2) + (C_2 - C_2') = (-3) + (1-(-3)) = 1$

x_2 کاندیدای ورود به پایه است و چون مثبت است جدول از حالت بهینه خارج می‌شود.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	1	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

ب) x_1 پایه‌ای است

این تغییر سود نسبی همه متغیرها را عوض می‌کند. کافی است $C_1' - C_1 = 0-(-2) = 2$ برابر غیرپایه‌ای‌ها و نیز سمت راست قید اول را به سطر اول اضافه کنیم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	-1	1	0	0	0
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

پ) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \ge 0$

پایه فعلی هنوز بهینه است

$Z_{new} = W^* b' = (-2, 0)\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = -6$

$\frac{\partial Z}{\partial b_1} = -2$ یعنی ۳ تا کم شده $6 \to 3$ سطر اول و
تابع هدف بهتر می‌شود $3 \times 2 = 6$

تغییر در یک ستون A - فرض کنیم a_k به a'_k تبدیل شود:

حالت اول - x_k غیرپایه‌ای باشد - این تغییر تنها سود نسبی x_k را می‌تواند عوض کند:

$$(z_k - c_k)_{new} = w^* a'_k - c_k$$

اگر x_k کاندیدای ورود باشد با سیمپلکس ادامه نشان می‌کنیم. $y'_k = B^{-1} a'_k$

حالت دوم - x_k در جواب بهینه، پایه‌ای است. یعنی a_k ستونی است از ماتریس پایه B.

متغیر جدید x'_k را با ضریب هدف c_k و ستون a'_k به مسئله اضافه می‌کنیم

x'_k
$z'_k - c_k$
$y'_k = B^{-1} a'_k$

$z'_k - c_k = w^* a'_k - c_k$ و $y'_k = B^{-1} a'_k$

با فرض $x_k = x_{B_{rk}}$، اگر $y'_{rk} \neq 0$، می‌توان ستون x_k را از جدول حذف کرد و روی $y'_{rk} \neq 0$ محورگیری کرد.

اما اگر $y'_{rk} = 0$ (حالتی که a_k یا a'_k پایه‌ای بودن را نقض می‌کند)، x_k را به عنوان متغیر مصنوعی که برای ساختن پایه استفاده شده در نظر می‌گیریم و ضریب آن را در مسئله اصلی به M تغییر می‌دهیم

مثال ۶-۱۲ صفحه ۲۷۳ مطالعه شود.

افزوده شدن محدودیت جدید (اضافه شدن فعالیت جدید در مسئله دوآل)

$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{پایه بهین } B \rightarrow X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

با فرض قید ناسازگاری: $a^{m+1}X \leq b_{m+1}$ قید $(m+1)$ام

$\text{if } a^{m+1}x^* \leq b_{m+1} \Rightarrow$ x^* جواب بهینه مسئله جدید هم هست

O.W قید جدید را نقض می‌کند x^* $\xrightarrow{\text{استاندارد}} a^{m+1}x + S = b_{m+1}$

$$\Rightarrow a_B^{m+1}x_B + a_N^{m+1}x_N + 1S = b_{m+1}$$

محدودیت استاندارد شده را به جدول اضافه می‌کنیم و جدول را با انتخاب S به عنوان پایه‌ای همگام می‌کنیم.

	x_B	x_N	S		
	0	$C_B B^{-1}N - C_N$	0	$C_B \bar{b}$	
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}$	$\bar{b}$	m سطر
S	a_B^{m+1}	a_N^{m+1}	1	b_{m+1}	یک سطر

$$Z_S - C_S = (C_B)_{new}\, y_S - 0 = (C_B, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

پس از همگام سازی، سمت راست قید جدید منفی خواهد بود و از سیمپلکس دوگان استفاده می‌کنیم.

قید (m+1)ام $a^{m+1}x = b_{m+1}$ با فرض قید تساوی

اگر x^* روی قید باشد که جواب همان x^* است

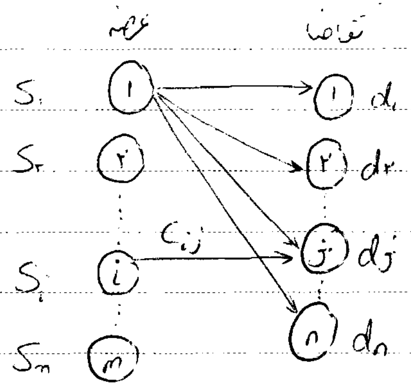
$$\Rightarrow \begin{cases} a^{m+1}x \leq b_{m+1} \\ a^{m+1}x \geq b_{m+1} \end{cases} \Rightarrow$$

اگر x^* روی قید ساده‌ای نباشد، نقاطی از این در محدودیت ساده‌ای نقض می‌شود. قید ساده‌ای نقض شده را مانند حالت قبل به مسئله اضافه می‌کنیم.

مثال ۶-۱۴ صفحه ۲۷۷ مطالعه شود.

حمل و نقل

تعریف مسئله: فرض کنیم m محل عرضه و n محل تقاضا داشته باشیم. هزینه انتقال یک واحد کالا از عرضه i ام به تقاضای j ام، c_{ij} باشد. اگر موجودی عرضه i ام برابر S_i و تقاضای j ام به اندازه d_j باشد. هدف عبارتست از یافتن الگویی برای انتقال کالاها از گره‌های عرضه به تقاضا به طوری که نیازها برآورده شده و هزینه انتقال کمینه باشد.



گراف دارای: $m+n$ گره، $m.n$ کمان

مدل خطی مسئله حمل و نقل متوازن:

$\sum_i S_i = \sum_j d_j \longrightarrow$ حمل و نقل متوازن

if $\sum_i S_i < \sum_j d_j \longrightarrow$ مسئله جواب ندارد

if $\sum_i S_i > \sum_j d_j \longrightarrow$ در حالتی که جمع عرضه بزرگتر از جمع تقاضاست

گره تقاضای کاذب $(n+1)$ ام را با $d_{n+1} = \sum S_i - \sum d_j$ به مسئله اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $c_{i,n+1} = 0$. در این صورت یک مسئله متوازن خواهیم داشت.

x_{ij} = میزان کالای انتقالی از مبدأ i ام به مقصد j ام $\quad i=1,\dots,m$
$j=1,\dots,n$

mn متغیر یعنی به اندازه تحرکات یک متغیر

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

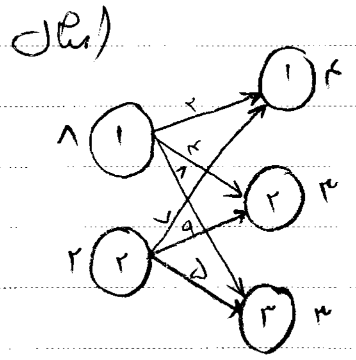
$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i & i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & j=1,\dots,n \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

m قید عرضه

n قید تقاضا

$m+n$ قید و mn متغیر

مثال)



$$\text{Min: } 2x_{11}+4x_{12}+8x_{13}+7x_{21}+9x_{22}+5x_{23}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} = 8 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} = 2 \\ x_{11}+x_{21} = 4 \\ x_{12}+x_{22} = 3 \\ x_{13}+x_{23} = 3 \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

معمولاً عرضه و تقاضا را برابر فرض می‌کنیم، در این صورت هر ستون ماتریس ضرایب مسئله دارای یک عدد 1 و یک عدد 1 می‌شود!

* جواب مسائل حمل و نقل همواره جواب صحیح و عدد صحیح است، هیچ وقت دارای منطقه موجه نامحدود و بدون جواب نیست.

در حالت کلی - $C = (C_{11} \cdots C_{1n}, C_{21}, \cdots, C_{mn})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \cdots 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 1 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 1 \\ \hline I_n \cdots I_n \cdots I_n \end{bmatrix}_{(m+n)(mn)} \begin{array}{l} m \text{ عرضه} \\ \\ n \text{ تقاضا} \end{array}$$

تعداد سطرهای ماتریس A ⇐ $mn+mn-2mn$

تعداد کل درایه‌های ⇐ $(m+n)(mn)$

درصد درایه‌های با عنصر ⇐ $\frac{2mn}{(m+n)(mn)} = \frac{2}{m+n}\%$

	۱	۲	۳	S_i
۱	۳	۴	۸	۸
۲	۷	۹	۵	۲
d_j	۴	۳	۳	

مسئله حمل و نقل را می‌توان روی جدول حمل و نقل نیز نشان داد

در حالت کلی این جدول دارای m سطر و n ستون یعنی mn سلول، هر سلول متناظر با یک متغیر (کمان) است.

	۱ ...	۲ ...	j ...	n	
1					S_1
$\vdots$ i					S_i
$\vdots$ m					S_m
	d_1	$\cdots d_2$	$\cdots d_j$	$\cdots d_n$	

$C = (C_{11}, \cdots, C_{mn})$

$A = (\cdots a_{ij} \cdots)_{(m+n)(mn)}$

$\vec{a_{ij}}$ ستون ضرایب متغیر x_{ij}

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{سطر iام} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{سطر (j+m)ام} \\ \\ \\ \end{array}$$

$a_{ij} = e_i - e_{m+j}$ و $b = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_n \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} & \text{Min } Cx \\ & \text{s.t} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

خواص ماتریس ضرایب مسئله حمل و نقل متوازن $A \in R_{(m+n)(mn)}$

۱ـ تعداد قیود مستقل $(m+n-1)$ است   تعداد متغیر پایه $r(A) = m+n-1$

۲ـ ماتریس A تک کالبدی (تک هنگ) است. به این معنی که دترمینان هر زیر ماتریس مربعی آن ۱، ۱- یا ۰ است.

۳ـ هر زیر ماتریس پایه A را می‌توان مثلثی در نظر گرفت.

هر مسئله حمل و نقل متوازن تابع هدف شدنی و کراندار است اگر $S_p \neq \Phi$ است، S_p کراندار است.

$$0 \le x_{ij} \le Min\{S_i, d_j\}$$

یعنی مسئله حمل و نقل متوازن جهت دور شونده ندارد.

مسئله P و D حمل و نقل دارای جواب بهینه متناهی است.

از نتایج تک کالبدی بودن A ـ

۱. صحیح بودن ـ اگر S_i و d_j ها همگی صحیح باشند آنگاه هر جواب گوشه‌ای حمل و نقل دارای مختصات صحیح است.

$$BX_B = b \xrightarrow{\text{دستور کرامر}} (X_B)_k = \frac{|B_k|}{|B|}$$

$|B_k|$ ماتریس حاصل از جایگزینی ستون kام B با بردار b است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۲- همچنین جواب دستگاه $BJ_{ij}=a_{ij}$ یعنی $J_{ij}=B^{-1}a_{ij}$ هم مولفه‌هایش ۱+ یا ۱- یا ۰ است.

پس ستون غیر پایه‌ای a_{ij} را می‌توان با جمع و تفریق ساده‌ای از ستون‌های B به دست آورد!

الگوریتم حمل و نقل (پیاده‌سازی الگوریتم سیمپلکس روی جدول حمل و نقل)

گام ۱: آغازین - یافتن BFS آغازین
- روش گوشه شمال غربی
- روش کمترین هزینه
- روش فوگل

$BX_B=b$

گام ۲: اصلی -

قدم اول: بررسی بهینگی پایه فعلی و یا انتخاب متغیر وارد شونده. $WB=C_B$

قدم دوم: انتخاب خارج شونده، و محورگیری. $BJ_{ij}=a_{ij}$

$A\in\mathbb{R}_{(m+n)(mn)}$

$r(A)=m+n-1$

$A^{\circ}=(A, e_{m+n}) \Rightarrow r(A)=m+n$

نکته- این تغییر معادل با اضافه کردن کمان ریشه به تقاضای آخر است. متغیر مصنوعی x_a

نکته- در هر پایه مسئله جدید، بردار e_{m+n} حضور دارد.

یافتن BFS آغازین روی جدول حمل و نقل -

۱- روش گوشه شمال غربی -

مثال

	۱	۲	۳	٤	S_i
۱	۱۵	۱۵			۳۰ ~~۱۵~~ ۰
۲		۵	۳۱	۹	~~٤۵~~ ~~٤۰~~ ~~۹~~ ۰
۳				۵۰	~~۵۰~~ ۰
٤				۲۵	۲۵
d_j	~~۱۵~~	~~۲۰~~	~~۳۱~~	۸٤	
	۰	~~۵~~	۰	~~۷۵~~	
		۰		~~۲۵~~	

$m = n = 4$

$m + n - 1 = 7$

مشخصات یک جواب پایه ای روی جدول

B	B		
	B	B	B
			B
			B

① $m+n-1$ سلول پایه ای

② در هر سطر و ستون حداقل یک سلول پایه ای است.

③ سلول های پایه شکل دور نمی شوند.

irmgn.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش کمترین هزینه -

$m = ۳ \;,\; n = ٤$

$m + n - 1 = ۶$

	۱	۲	۳	۴	S_i
۱	۲ (۱۵)	۴	۷	۶	~~۱۵~~ ۰
۲	۵ (۲)	۸ (۴)	۱۰ (۱)	۱۲ (۸)	~~۱۵~~ ~~۱۳~~ ~~۹~~ ~~۸~~ ۰
۳	۴	۹	۲ (۵)	۳	~~۵~~ ۰
d_j	~~۱۷~~ ~~۲~~ ۰	~~۴~~ ۰	~~۶~~ ~~۱~~ ۰	~~۸~~ ۰	

B			
B	B	B	B
		B	

بررسی بهینگی BFS آغازین و انتخاب متغیر وارد شونده:

$$w_{1\times(m+n)} B_{(m+n)(m+n)} = C_B$$

u_i = متغیر دوآل عرضه iام $\quad i=1,\dots,m$ $\qquad z_j - c_j = 0$

v_j = متغیر دوآل تقاضای jام $\quad j=1,\dots,n$ $\qquad z_j = c_j$

$w = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ $\qquad c_B B^{-1} a_j = c_j$

$B = (a_{pq}, \dots, a_{rs}, e_{m+n})$ $\qquad w a_j = c_j$

$C_B = (c_{pq}, \dots, c_{rs}, c_a)$ $\qquad wB = C_B$

$$z_{ij} - c_{ij} = w a_{ij} - c_{ij}$$
$$= (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)(e_i - e_{m+j}) - c_{ij} \Rightarrow z_{ij} - c_{ij} = u_i - v_j - c_{ij}$$

$$wB = C_B \Leftrightarrow \begin{cases} u_p - v_q = c_{pq} \\ \vdots \\ u_r - v_s = c_{rs} \end{cases}$$

یک دستگاه $(m+n-1)$ معادله و $(m+n)$ مجهول که با جایگذاری پسرو حل می‌شود.

$v_n = ۰$ کافی است ستونی سلول‌های پایه‌ای را صفر قرار دهیم.

$(i,j) \notin G_B : z_{ij} - c_{ij} = u_i - v_j - c_{ij}$ ، w صفر فرض می‌شود

مثال)

۴ B	۷ B	۵ B	u_1
۲	۴	۳ B	u_2
v_1	v_2	$v_3 = 0$	

$(1,1) \in G_B \quad u_1 - v_1 = 4 \qquad v_3 = 0$

$(1,2) \in G_B \quad u_1 - v_2 = 7 \qquad u_2 = 3$

$(1,3) \in G_B \quad u_1 - v_3 = 5 \qquad u_1 = 5 \qquad W = (5, 3, 1, -2, 0)$

$(2,3) \in G_B \quad u_2 - v_3 = 3 \qquad v_2 = -2$

$v_3 = 0 \qquad v_1 = 1$

$(2,1) \notin G_B \quad Z_{21} - C_{21} = u_2 - v_1 - C_{21} = 3 - 1 - 2 = 0$

$(2,2) \notin G_B \quad Z_{22} - C_{22} = u_2 - v_2 - C_{22} = 3 + 2 - 4 = 1 > 0$

پس پایه فعلی بهینه نیست و سلول (متغیر) $\{(2,2)\}$ / x_{22} / کاندیدای ورود به پایه و بهبود جواب است.

انتخاب سلول غیرپایه واردشونده و محورگیری

فرض کنیم $Z_{pq} - C_{pq} > 0$ یعنی سلول غیرپایه‌ای (p,q) متغیر غیرپایه‌ای x_{pq} کاندیدای ورود به پایه و بهبود تابع هدف است.

$B y_{pq} = a_{pq} \xrightarrow{\text{حل}} y_{pq} = B^{-1} a_{pq}$

جواب این دستگاه را می‌توان از قاعده ساده‌ای موسوم به قاعده [illegible] به دست آورد.

تا یافتن دور

سلول وارد شونده (p و q) را به گراف پایه اضافه می‌کنیم. دور منحصر به فردی تشکیل می‌شود. در سلول های گوشه‌ای این دور با شروع از یکی از عنصرهای سلول pq علامت‌های + و - را یکی در میان توزیع می‌کنیم.

حال اگر Δ میزان افزایش x_{pq} از سطح صفر فعلی‌اش باشد آنگاه:

$\Delta = \min \{ x_{ij}$ | سلول پایه‌ای (i,j) در دور ضریب (+1) دارد $\}$

برای تعدیل جریان:

Δ را از جریان سلول های با ضریب (+) دور کم می‌کنیم

Δ را به جریان سلول های با ضریب (-) دور اضافه می‌کنیم.

جریان سایر سلول ها را تغییر نمی‌دهیم.

(با توجه به مثال قبل)

۴ / ۱۵ B	۷ / ۱۰ + B	۵ / ۵ B-	۳۰
۲	۴ / O	۳ / ۲۰ B+	۲۰
۱۵	۱۰	۲۵	

۴ / ۱۵ B	۷	۵ / ۱۵ B	۳۰
۲	۴ / ۱۰ B	۳ / ۱۰ B	۲۰
۱۵	۱۰	۲۵	

$Z_{22}-C_{22}=1>0$ بهینه نیست

$\Delta=\min\{x_{12}, x_{23}\}=\{10, 20\}=10$

$\Delta Z=-(Z_{22}-C_{22})\cdot\Delta=-(1)(10)=-10$

$(x_{ij})_{new} = \begin{cases} x_{11}=15 \\ x_{12}=10-10=0 \\ x_{13}=5+10=15 \\ x_{21}=0 \\ x_{22}=10 \\ x_{23}=20-10=10 \end{cases}$

خارج شونده ← x_{12}

وارد شونده ← x_{22}

نکته) اگر در مسئله حمل و نقل جمع بخشی از عرضه بتوان برای برآورده کردن نیاز بخشی از تقاضا را داشته باشد، مسئله تباهیده است.

$$\sum_{i\in I} S_i = \sum_{j\in J} d_j$$

۲۰	۱۵		~~۳۵~~ ~~۱۵~~ ۰
	۰	۱۳	~~۱۳~~ ۰
~~۲۰~~ ۰	~~۱۵~~ ۰	~~۱۳~~ ۰	

$$I \subset \{1,\dots,m\} \quad , \quad J \subset \{1,\dots,n\}$$

نکته) فرض کنیم C_{ij} های مسئله حمل و نقل را با $k>0$ جمع کنیم: $C_{ij} \rightarrow C_{ij}+k$

دراین صورت می‌توان نشان داد که جواب بهینه تغییر نمی‌کند، ولذا $Z_{ij}-C_{ij}$ ها عوض نمی‌شوند ولی u_i های بهینه با k جمع می‌شوند:

$$(Z_{ij}-C_{ij})_{new} = (u_i+k)+v_j-(C_{ij}+k) = (Z_{ij}-C_{ij})_{old} \leq 0$$

پس جواب قبلی هنوز بهینه است!

$$\boxed{Z^*_{(new)}} = (C_B)_{new}\, b$$

$$= (C_B+(k,\dots,k))\, b = (C_B b)+k(\vec{1}\cdot b) = \boxed{Z_{old}+k\sum S_i}$$

نکته) فرض کنیم C_{ij} های مسئله حمل و نقل را $k>0$ برابر کنیم: $C_{ij} \rightarrow kC_{ij}$

می‌توان نشان داد که u_i ها و v_j ها همگی k برابر می‌شوند.

$$(Z_{ij}-C_{ij})_{new} = k(Z_{ij}-C_{ij})_{old} \leq 0$$

پس جواب بهینه باقی می‌ماند.

$$\boxed{Z^*_{new}} = (C_B)_{old}\, b = (kC_B)b = \boxed{k\, Z^*_{old}}$$

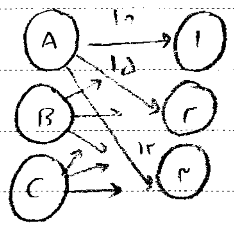
Subject:

Year. Month. Date. ( )

تخصیص (واگذاری) — Assignment problem

مثال)

	نقاشی	رانندگی	نظافت
A	۱۰	۱۵	۱۳
B	۱۳	۱۱	۱۶
C	۱۴	۱۰	۹



مسئله تخصیص حالت خاصی است از حمل و نقل که $m=n$ و $S_i = d_j = 1$

مدل بندی مسئله تخصیص -

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{کار } j \text{ ام به شخص } i \text{ ام واگذار شود} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, m \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

مسئله دارای m^2 متغیر و $2m$ قید

دیگر مدل خطی است!

به دلیل تک مدولی بودن ماتریس ضرایب A و اینکه سمت راست مقادیر صحیح اند همه جواب های

گوشه‌ای حل را صحیح اند و معادل آن به صورت زیر است

$$P: \text{Min} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m & u_i \\ -\sum x_{ij} = -1 & j = 1, \dots, m & v_j \\ x_{ij} \geq 0 & i, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

$$D: \text{Max} \sum_i u_i \sum_j v_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_i - v_j \leq c_{ij} & i, j = 1, \dots, n \\ u_i, v_j & \text{آزاد} \end{cases}$$

در خصوص ماتریس ضرایب، همه خواص ماتریس ضرایب مسئله حمل و نقل کماکان در مسئله تخصیص هم برقرار است. $r(A) = m + m - 1 = 2m - 1$

در هر جواب پایه‌ای مسئله تخصیص، m مولفه $x_{ij} = 1$ داریم و بقیه صفرند. پس از $2m-1$ مولفه پایه‌ای، $m-1$ تای آنها صفرند.

نتیجه ۱- درجه تباهیدگی هر BFS مسئله تخصیص $m-1$ است.

نتیجه ۲- تعداد پایه‌های متناظر با هر نقطه راسی مسئله تخصیص برابر است با: $2^{m-1} m^{m-2}$

الگوریتم مجارستانی برای حل مسئله تخصیص

I (PF) یافتن m تا سلول مستقل

II (DF) یافتن جوابی از دوال

III (C.S) $(c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = 0$ $i, j = 1, \dots, m$ m^2 شرط

این الگوریتم مجارستانی -

یافتن m سلول صفر مستقل در بین متغیرهای کمکی دوال

ماتریس تقلیل یافته اولیه (ماتریس متغیرهای کمکی اولیه) - از روی ماتریس هزینه‌های c_{ij} به طریق زیر ساخته می‌شود.

۱- مینیمم سطری را از سلول‌های هم سطر کم کنید.

۲- در ماتریس حاصل این عمل را برای ستون‌ها انجام دهید.

	۱	۲	۳	۴
۱	~~۳~~ ۱	~~۲~~ ۰	~~۵~~ ۳	~~۴~~ ~~۲~~ ۰
۲	۰	۱	۲	~~۳~~ ۱
۳	~~۴~~ ۵	~~۴~~ ۲	~~-۱~~ ۰	~~۳~~ ~~۴~~ ۲
۴	~~۳~~ ۰	~~۵~~ ۳	~~۴~~ ۱	~~۴~~ ~~۳~~ ۰

⇒

۱	$\boxed{۰}$	۳	۰
$\boxed{۰}$	۱	۲	۱
۵	۲	$\boxed{۰}$	۲
۰	۳	۱	$\boxed{۰}$

$Z^* =$ ۲ + ۰ + (-۱) + ٤ = ۵

(مثال)

~~۲~~ ۰	~~۵~~ ~~۳~~ ۲	~~۷~~ ۵
~~۴~~ ۳	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	~~۲~~ ۰
~~۴~~ ۰	~~۷~~ ~~۴~~ ۳	~~۴~~ ۳

۰	۲	۵
۳	۰	۰
۰	۳	۳

$m =$ ۳

$k =$ ۲ $< m$

(۲) - بیشترین تعداد سلول های صفر مستقل، برابر کمترین تعداد خطوط افقی یا عمودی لازم برای پوشاندن صفرهای جدول است.

تعدیل جواب دوآل و تشکیل ماتریس تعدیل یافته بعدی.

مقدار کوچکترین سلول پوشانده نشده را c بگیرید.

c را از سلول های پوشانده نشده کم کنید و به سلول های پوشانده شده اضافه کنید. نتیجه ماتریس تعدیل یافته بعدی است.

c_0

۰	~~۲~~ ۰	~~۵~~ ۳
~~۳~~ ۵	۰	۰
۰	~~۳~~ ۱	~~۳~~ ۱

⇒

۰	$\boxed{۰}$	۳
۵	۰	$\boxed{۰}$
$\boxed{۰}$	۱	۱

برنامه ریزی عدد صحیح -

$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x_j \text{ صحیح و } j \in JC\{1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

برنامه ریزی صحیح محض (تمام صحیح): ILP

$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x_j : x_j \text{ صحیح} \end{cases}$$

برنامه ریزی صحیح مختلط (آمیخته): MILP

$$\text{Min } Cx$$
$$\text{s.t } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x_j : \text{صحیح } j \in JC\{1,2,\dots,k\} \end{cases}$$

روش های حل مسئله ILP -

- روش صفحات برشی گوموری

- روش انشعاب و کران (B and B) یا برنامه ریزی (۰ و ۱)

روش صفحات برش گوموری -

ILP: $\min Cx$ $\qquad$ LP: $\min Cx$

$\quad s.t \; Ax=b$ $\qquad$ $s.t \begin{cases} Ax=b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad$ جواب بهینه سیمپلکس $x^* = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\quad \forall j: x_j \geq 0$ and صحیح

- اگر x^* در شرط صحیح بودن متغیرها صدق کند، جواب بهینه ILP هم هست،

در غیر اینصورت، $\exists\, \bar{b}_r \notin Z$

	$\cdots\; x_{B_r} \;\cdots$	$\cdots\; x_N \;\cdots$	$C_B \bar{b}$
x_{B_1}	0		b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{B_r}	1	y_{rj}	b_r
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	0		b_m

معادله سطر r ام $\quad x_{B_r} + \sum_{j\in NBV} y_{rj}\, x_j = \bar{b}_r$

$\bar{b} = I_r + F_r \;,\; I_r \in Z \;,\; 0 < F_r < 1$

$\forall j \in NBV:\; y_{rj} = I_{rj} + F_{rj} \;,\; I_{rj} \in Z \;,\; 0 \leq F_r < 1$

$\Rightarrow x_{B_r} + \sum_{j\in NBV} (I_{rj} + F_{rj})\, x_j = I_r + F_r$

$$x_{B_r} + \underbrace{\sum_{j\in NBV} (I_{rj}\, x_j - I_r)}_{\in Z} = \underbrace{F_r - \underbrace{\sum_{j\in NBV} F_{rj}\, x_j}_{\geq 0}}_{<1}$$

$\Rightarrow F_r - \sum F_{rj} x_j \leq 0$: معادله برش گوموری $\xrightarrow{\text{استاندارد}}$ $-\sum F_{rj} x_j + 1 x_s = -F_r$: معادله برش گوموری

نکته ـ X^* مسئله پیوسته در این معادله صدق نمی‌کند.

$$\sum F_{rj}(0) + X_s = -F_r \Rightarrow X_s < 0 \quad \overset{*}{X}$$

	x_{Br}	x_j	x_s	$C_B\,b$
x_{B_1}	0		0	b_1
x_{Br}	1	α_{rj}	0	b_r
x_{Bm}	0		0	b_m
x_s	0	$-F_{rj}$	1	$-F_r$

معادله برش را به جدول بهینه LP پیوسته قبلی اضافه می‌کنیم و با سیمپلکس ثانویه حل مسئله را ادامه می‌دهیم. اگر جواب بهینه جدید صحیح بود توقف، بهینه مسئله ILP بدست آمده است. در غیر اینصورت یک سطر غیرصحیح (اعشاری) را برای نوشتن معادله برش جدید انتخاب می‌کنیم و این فرآیند ادامه می‌یابد تا رسیدن به مختصات صحیح بهینه یا ناشدنی شدن Sp

نکته ـ برش عمیق‌تر ـ برشی که $\max\{F_i\}$ یا $\max\left\{\frac{F_i}{\sum F_{ij}}\right\}$ را داشته باشد.

مثال ۶-۱۵ صفحه ۲۷۹ مطالعه شود.