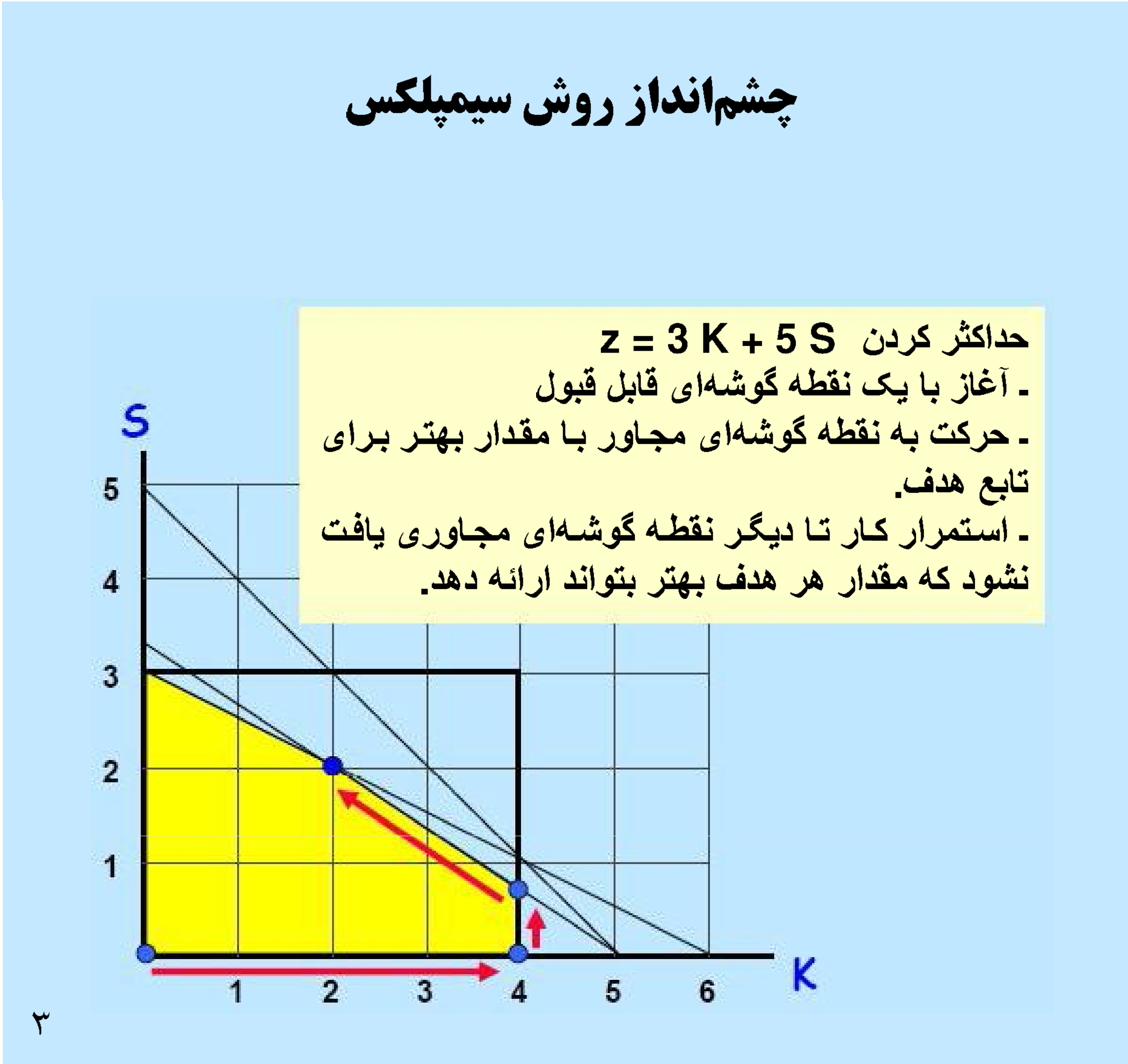
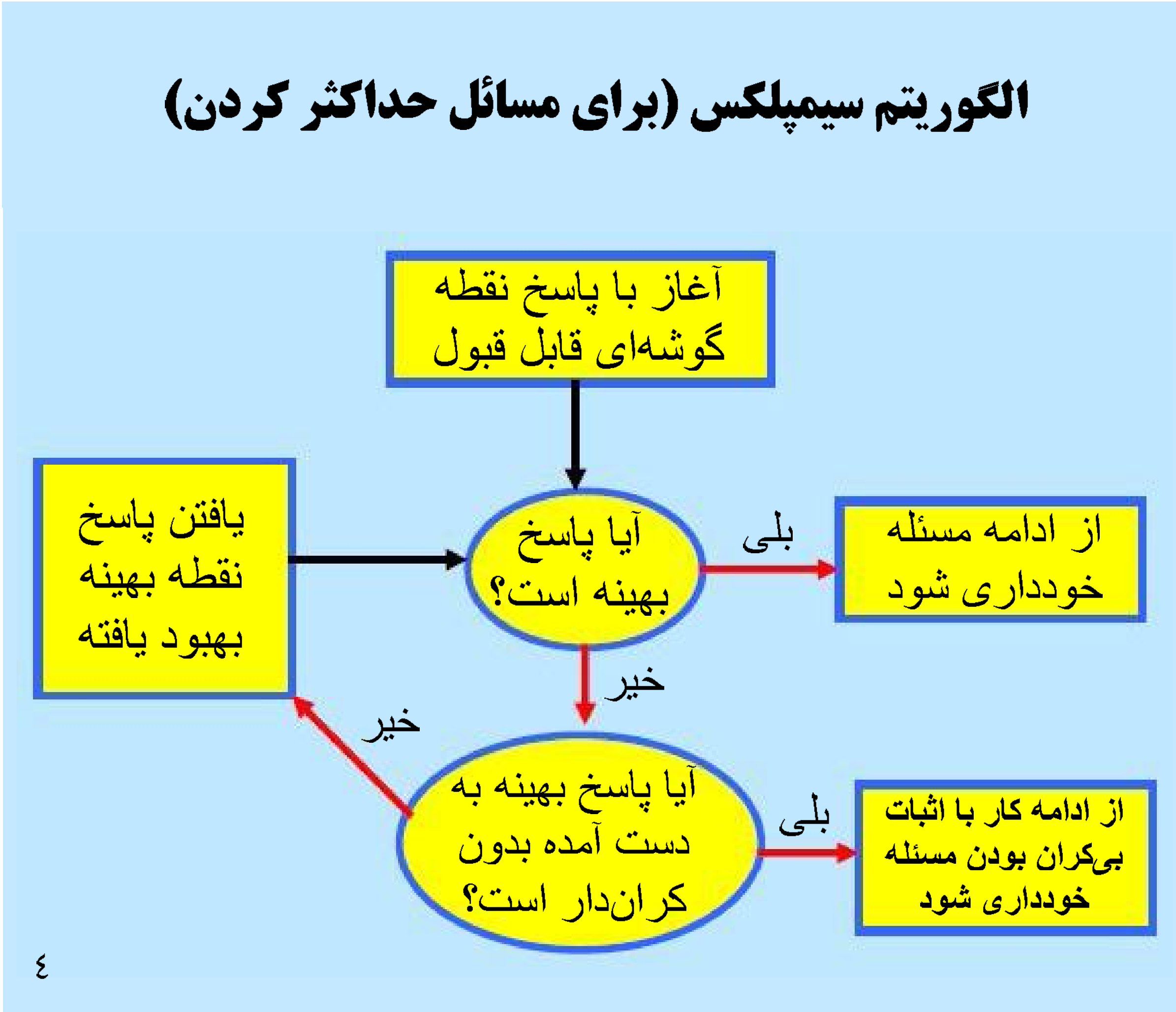


این شکل، الگوریتم سیمپلکس را در چارچوب روابط نابرابر محدودیت‌ها ارائه می‌دهد. در این چارچوب، الگوریتم سیمپلکس، حرکت از یک نقطه گوشه‌ای به نقطه گوشه‌ای دیگر است. هر نقطه گوشه‌ای محل تلاقی دو محدودیت می‌باشد.

هنگام حرکت در چارچوب روابط برابر محدودیت‌ها، الگوریتم سیمپلکس هنوز هم از یک نقطه گوشه‌ای به نقطه دیگر گوشه‌ای حرکت می‌کند. تمام نقاط گوشه‌ای با حل دستگاه معادلات روابط محدودیت به دست می‌آیند. در این صورت، نقاط گوشه‌ای مختلفی یافت می‌شوند که باید آنهایی را پذیرفت که در تمامی معادلات صدق می‌کنند.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، شکل مذکور، ساختار مناسبی را برای حل مسئله حداکثر کردن در اختیار قرار می‌دهد. در عین حال، یافتن پاسخ بهینه قدری به زمان نیاز دارد. برای آشنایی با نحوه بهره‌گیری از آن ساختار مثال فضای دوبعدی مطرح می‌شود.

فرض می‌شود با پاسخ نقطه گوشه‌ای قابل قبول کار جستجو آغاز می‌شود. با دو سؤال مواجه می‌شویم. پاسخ نقطه گوشه‌ای چه مقدار است؟ پس از آغاز کار، چگونه می‌توان به نقطه گوشه‌ای پاسخ دست یافت؟ به اختصار پاسخ هر دو سؤال داده می‌شود.

اسلاید بعدی مطلب را قدری بازتر می‌کند. فرض می‌شود با برنامه خطی که دارای روابط محدودیت برابر و نامنفی است شروع به کار می‌شود. هر برنامه خطی را در شکل آغازینش در نظر می‌گیریم. در چند اسلاید بعدی نحوه انجام چنین کاری را نشان خواهیم داد.

اهداف این درس

آشنایی با مباحث اصلی الگوریتم سیمپلکس

۱. چگونه فرد می‌تواند برنامه خطی را در شکل اولیه حل مسئله قرار دهد؟

۲. چگونه فرد می‌تواند بهینگی و کراندار نبودن پاسخ را تشخیص دهد؟

۳. چگونه فرد می‌تواند به پاسخ نقطه گوشه‌ای بعدی حرکت کند؟

تذکر: الگوریتم سیمپلکس را در کلاس نشان خواهیم داد.

برنامه‌های خطی در شکل متعارف

اگر برنامه خطی ویژگی‌های زیر را داشته باشد، در چارچوب متعارف (استاندارد) است:

۱. محدودیت‌های نامنفی برای تمامی متغیرها.

۲. نوشتن تمامی محدودیت‌های نابرابر در چارچوب روابط برابر

۳. نامنفی بودن بردار سمت راست، b

برنامه خطی که در شکل استاندارد نیست

	$z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$	حداکثر کردن
محدودیت نابرابر	$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le 5$;	با شرط
محدودیت نابرابر	$-2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \le -1$;	
منفی بودن x_3 و x_4	$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	

در حل مسئله با استفاده از Excel نیازی به نوشتن برنامه خطی به شکل متعارف نیست زیرا برنامه بلافاصله از طریق نرم‌افزار به شکل استاندارد تبدیل می‌شود. در اسلاید بعدی مشاهده خواهید کرد که در حل برنامه‌ریزی خطی چگونه باید با LP کار کرد که در چارچوب استاندارد نیست.

تبدیل روابط نابرابر محدودیت به روابط برابر و در نظر گرفتن روابط نامنفی

بعد از تبدیل	قبل از تبدیل
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + s_1 = 5$ $s_1 \geq 0$	$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5$

S_1 متغیر کمبود است که مقدار «منبع بلااستفاده» را نشان می‌دهد.

توجه شود که: $s_1 = 5 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$

> برای تبدیل یک محدودیت نابرابر «≤» به رابطه برابر، از متغیر کمبود استفاده می‌شود.

بنابراین، «محدودیت ≤» را به طریق زیر تبدیل وضعیت می‌دهیم:

۱. افزودن متغیر کمبود

۲. نامنفی در نظر گرفتن متغیر کمبود

تبدیل سمت راست (RHS) و محدودیت‌های «≥»

- ملاحظه کردن رابطه نابرابری $-2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \leq -1$ ؛

- مرحله ۱. حذف مقدار نامنفی سمت راست. برای این کار آن را در «1-» ضرب می‌کنیم. $2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \geq 1$

- مرحله ۲. تبدیل رابطه محدودیت به یک رابطه برابر

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - s_2 = 1$$
$$s_2 \geq 0$$

- متغیر اضافه شده، «متغیر مازاد» اطلاق می شود

برای تبدیل یک محدودیت نابرابر «≥» به رابطه برابر، از متغیر مازاد استفاده می‌شود.

از مقدار منفی سمت راست، با ضرب آن در «1-» خلاص می‌شویم

تبدیل رابط محدودیت «≥» با طی مراحل زیر امکان‌پذیر می‌شود:

۱. افزودن متغیر مازاد

۲. نامنفی در نظر گرفتن متغیر مازاد

بعضی مواقع، در نامیدن متغیرهای کمبود و مازاد ممکن است دچار اشتباه شد زیرا آنها دقیقاً عملکرد یکسانی دارند و وظیفه‌شان تبدیل رابطه نابرابر محدودیت به رابطه برابر است. در عمل با اسامی مختلفی احتمالاً روبه‌رو خواهیم شد. اغلب «محدودیت ≤» در مدل نشانگر محدودیت منابع و داشتن سقف برای آن است. لذا، متغیر کمبود نشانگر میزان تأمین ضروری است. در حالی که «محدودیت ≥» در مدل، نشانگر دست‌کم حداقل منابع مورد نیاز برای تولید است. اگر بیش‌تر از آنچه که نیاز است تولید کنیم، گفته می‌شود که با مازاد تولید روبه‌رو خواهیم شد.

تبدیل برنامه حداکثر به حداقل و برنامه حداقل به حداکثر

تبدیل برنامه حداکثر به حداقل: ضرب هدف در 1-

مثال: $z = 3x_1 + 2x_2$ حداقل کردن

«محدودیت‌ها» با شرط

این مسئله همان پاسخ(ها) را خواهد داشت که برنامه‌ریز دارد.

$v = -3x_1 - 2x_2$ حداکثر کردن

«محدودیت‌ها» با شرط

حداقل کردن z از نظر ریاضی معادل با حداکثر کردن z– است. نکته جالب توجه اینکه از منظر کارشناسان، عبارت تابع هدف ترجیحات متفاوت دارد. اگر به کارشناسی بگویید که منفی مخارج را حداکثر کنید، آن شخص دچار سرگیجی خواهد شد، مگر آنکه آن را تبدیل به حداکثرسازی سود کنید. در حالی که از منظر ریاضی، در اینجا تفاوتی میان آن دو حالت وجود ندارد.

سایر تبدیل‌ها

با مربی آموزشی خود درباره تبدیل‌ها گفتگو کنید.

چرا شکل استاندارد؟

روش سیمپلکس برای مسائلی طراحی شده که رابطه محدودیت برابر و نامنفی داشته باشند.

مربی آموزشی (آموزشیاران) وضعیتی‌ها را نشان می‌دهند که در آنها متغیر x به صورت محدودیت $x \geq 0$ آغاز نشده است. امکان دارد در مدل بعضی متغیرها نامنفی باشند و دیگر متغیرها از نظر علامت، محدودیتی نداشته باشند. در تمامی این موارد، در حل برنامه خطی ابتدا برنامه متناظر به وجود می‌آید تا اینکه تمام متغیرها به صورت محدودیت نامنفی نوشته شوند.

بازنگری: حل دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

عنصر چرخش

	x_1	x_2	x_3		مقدار سمت راست
ردیف چرخش ← معادله ۱	2	2	1	=	9
معادله ۲	2	-1	2	=	6
معادله ۳	1	-1	2	=	5

ستون چرخش

۱۱

به مجموعه معادلاتی که در ردیف بالای آنها متغیر x نوشته شده، «تابلو» گفته می‌شود. برای تشریح الگوریتم سیمپلکس از تابلو استفاده خواهیم کرد.

ردیف چرخش

عنصر چرخش

	x_1	x_2	x_3		RHS
معادله ۱	1	1	1/2	=	9/2
معادله ۲	0	-3	1	=	-3
معادله ۳	0	-2	3/2	=	1/2

ستون چرخش

ستون اول را به $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ تبدیل می‌کنیم

برای این کار، معادله اول را بر 2 تقسیم می‌نماییم.

سپس 2 ضربدر معادله اول کرده و آن را را از معادله 2 کسر می‌کنیم.

معادله 1 از معادله سوم کسر می‌شود.

۱۲

برای کسب اطلاعات بیش‌تر درباره حل دستگاه معادلات، به بخش آموزشیار در شبکه مراجعه شود.

ستون چرخش

	x_1	x_2	x_3		RHS
معادله ۱	1	0	5/6	=	7/2
معادله ۲	0	1	-1/3	=	1
معادله ۳	0	0	5/6	=	5/2

ردیف چرخش

عنصر چرخش

ستون دوم را به $\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}$ تبدیل می‌کنیم

برای این کار معادله دوم را بر 3- تقسیم می‌نماییم.

معادله دوم را از معادله اول کسر می‌کنیم.

با ضرب معادله دوم در عدد 2، آن را به معادله سوم اضافه می‌نماییم.

	x_1	x_2	x_3		RHS
معادله ۱	1	0	0	=	1
معادله ۲	0	1	0	=	2
معادله ۳	0	0	1	=	3

ستون سوم را به $\boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}$ تبدیل می‌کنیم

معادله سوم را بر $\frac{5}{6}$ تقسیم می‌نماییم.

معادله سوم را از معادله اول کسر می‌کنیم.

با ضرب معادله سوم در عدد $\frac{1}{3}$ ، آن را به معادله دوم می‌افزاییم.

	x_1	x_2	x_3		RHS
معادله ۱	1	0	0	=	1
معادله ۲	0	1	0	=	2
معادله ۳	0	0	1	=	3

معادلات حاصل $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$

حالا حل و پاسخ مشخص و روشن شده است.

دستگاه معادلات، شکل بسیار خاصی هستند.

۱۵

در خاتمه، هر ستون به بردار یکه تبدیل شده که یک عـدد «1» و دو عـدد «0» دارد. خود معادلات برای هر متغیر، مقداری که در سمت راست‌شـان نوشـته شـده، اخـذ می‌کنند.

۱. شروع با پاسخ نقطه گوشه‌ای قابل قبول

- آغاز با تابلویی مطابق «شکل استاندارد»

  - برنامه خطی دارای روابط برابر محدودیت و روابط نامنفی برای متغیرهاست.

  - یک متغیر «پایه» برای هر یک از معادلات محدودیت برابر وجود دارد.

  - ستون متغیر پایه برای محدودیت jام، عدد 1، در محدودیت j و صفر برای سایر محدودیت‌ها دارد.

  - متغیرهای باقی مانده، «غیر پایه‌ای» خوانده می‌شوند.

۱۶

شکل استاندارد ضرورتاً پاسخ گوشه‌ای ارائه نخواهد داد اما محل مناسبی برای آغاز کار است.

برای پاسخ یک نقطه گوشه‌ای،

تابلو در شکل استاندارد

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	1	=	2
0	0	2	1	0	-1	=	4
0	0	-1	0	1	2	=	1
0	1	6	0	0	3	=	3

متغیرهای ناپایه‌ای، متغیرهای x_2 و x_5 هستند.
z متغیر پایه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

۱۷

اگر از متغیرهای غیرپایه‌ای خلاص شویم (در اسلاید x_2 و x_5 با حالت خاص نشان داده شده)، معادلات حاصل همان پاسخ را خواهند داشت. به عبارت دیگر، معادلات برابر خواهند بود با $x_3 = 4, x_4 = 1, x_1 = 3$.

در واقع، آن دو ستون را نمی‌توان تنزل داد. از این رو، متغیرهای پایه‌ای را برابر صفر قرار می‌دهیم و از نظر ریاضی به معنای آن است که آن متغیرها، مقداری کسب نمی‌کنند.

«پاسخ قابل قبول پایه‌ای» bfs

متغیرهای پایه‌ای x_1، x_3، x_4 و z هستند.

متغیرهای غیر پایه‌ای x_2 و x_5 هستند.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	1	=	2
0	0	2	1	0	-1		4
0	0	-1	0	1	2	=	1
0	1	6	0	0	3	=	3

برابر صفر قرار دادن متغیرهای غیرپایه‌ای

پاسخ قابل قبول پایه‌ای (bfs) برابر است با:

$x_2 = x_5 = 0;$ $x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 1, z = 2$

۱۸

از واژه «پاسخ قابل قبول پایه‌ای» یا «bfs» در سرتاسر این درس استفاده خواهد شد. هر bfs، یک نقطه گوشه‌ای نیز هست، لذا نقطه میانی قطعه خطی نمی‌باشد که دو پاسخ دیگر را به هم متصل می‌کند.

روش سیمپلکس از یک نقطه گوشه‌ای به نقطه گوشه‌ای دیگر روی رئوس حرکت می‌کند.

چه وقتی پاسخ قابل قبول پایه‌ای (bfs) بهینه است؟

در همین اثنا، شرایط بهینگی را به دست می‌آوریم.

مثال

$$\text{حداکثر کردن} \quad z = -2x_2 - x_5 + 2$$
$$\text{با شرط} \quad x_1 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

پاسخ بهینه برای این مسئله چیست؟

در اولین مثال برنامه خطی می‌توان موارد زیر را مشاهده کرد:

۱. تابع هدف صرفاً جملاتی برای متغیرهای ناپایه‌ای دارد.

۲. ضرایب متغیرها در تابع هدف، نامثبت هستند و صرفاً متغیرهای غیر پایه‌ای را در بر گرفته‌اند.

۳. تنها، محدودیت‌های حاوی متغیرهای غیرپایه‌ای، محدودیت‌های نامنفی هستند.

بنابراین، تمام آن چیزی که فعلاً نیاز هست تا انجام دهیم، بهینه کردن x_2 و x_5 است که در این مثال، آنها برابر صفر قرار داده می‌شوند.

مثال دوم

حداکثر کردن $z = -2x_2 - x_5 + 2$

$$x_1 = 3 - 6x_2 - 3x_5$$

$$x_3 = 4 - 2x_2 + x_5$$

$$x_4 = 1 + x_2 - 2x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

پاسخ بهینه برای این مسئله چیست؟

۲۰

در دومین مثال برنامه خطی، می‌توان موارد زیر را مشاهده کرد:

۱. تابع هدف فقط جملاتی دارد که برای متغیرهای ناپایه‌ای هستند.

۲. ضرایب متغیرها در تابع هدف نامثبت هستند و صرفاً متغیرهای غیر پایه‌ای را در بر دارند.

۳. برای دستیابی به پاسخ قابل قبول، متغیرهای ناپایه‌ای برابر صفر قرار داده می‌شوند.

در این مورد، متغیرهای غیر پایه‌ای برای دستیابی به پاسخ قابل قبول $z = 2$، برابر صفر قرار داده می‌شوند. برای هر پاسخ دیگر $x_2 \geq 0$ و $x_5 \geq 0$ و از این رو، $z \leq 2$ خواهد بود. پاسخ با برابر صفر قرار دادن متغیرهای غیر پایه‌ای، باید بهینه شود.

بنابراین، آنچه که فعلاً نیاز است تا x_2 و x_5 بهینه شوند، این است که آنها را برابر صفر قرار دهیم.

چه وقت شرایط برای بهینه بودن پاسخ کافی است؟

حداکثر کردن	$z = -2x_2 - x_5 + 2$
با شرط	$x_1 = 3 - 6x_2 - 3x_5$
	$x_3 = 4 - 2x_2 + x_5$
	$x_4 = 1 + x_2 - 2x_5$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

پاسخ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 بهینه بودن برای برنامه خطی را با محدودیت‌های نامنفی تضمین می‌کند.

هر وقت که...

۲۱

تابع هدف دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای نامثبت هستند.

۲. ضرایب متغیرهای پایه‌ای صفر هستند.

پاسخ قابل قبول x با برابر صفر قرار دادن متغیرهای غیر پایه‌ای به دست می‌آید.

شناسایی bfs بهینه: تفسیر تابلو

پاسخ قابل قبول پایه‌ای (bfs) برابر است با:
$x_2 = x_5 = 0;\quad x_1 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1,\ z = 2$

آیا این بهینه است؟

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	1	=	2
0	0	2	1	0	-1	=	4
0	0	-1	0	1	2	=	1
0	1	6	0	0	3	=	3

حداکثر کردن $z = -2x_2 - x_5 + 2$ با شرط $x \geq 0$

پاسخ بهینه: $z = 2$

۲۲

در چارچوب تابلو، هدف بدین صورت نوشته می‌شود: $z + 2x_2 + x_5 = 2$

شرایط بهینگی برای bfs در چارچوب تابلو: ضرایب نامنفی ردیف z برای متغیرهای غیر پایه‌ای. گفتنی است که تابلوهایی که هم‌اکنون به bfsها ربط دارند دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱. ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف صفر هستند.

۲. پاسخ قابل قبول با برابر صفر قرار دادن متغیرهای غیر پایه‌ای به دست می‌آیند.

از این رو، شرط بهینگی تابلو مذکور برای bfs برابر همان دستاوردهای اسلایدهای قبلی است.

شرایط بهینگی

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	1	=	2
0	0	2	1	0	-1	=	4
0	0	-1	0	1	2	=	1
0	1	6	0	0	3	=	3

نکته مهم:
اگر در ردیف z، ضریب منفی وجود نداشته باشد، پاسخ قابل قبول پایه‌ای، بهینه است!

حداکثر کردن $z = -2x_2 - x_5 + 2$

با یکدیگر شرایط کراندار نبودن ناحیه قابـل قبـول را به دست می‌آوریم

آیا ناحیه بدون کران‌دار بهینه از مرحله قبل به دست آمده است؟

مثال

حداکثر کردن	$z = -2x_2 + x_5 + 2$
به شرط	$x_1 = 3,\ x_3 = 4\ ,\ x_4 = 1$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

پاسخ بهینه برای این مسئله چه است؟

تابع هدف (برای مسئله حداکثر) در این مثال در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. ضرایب متغیرهای پایه‌ای در هدف، صفر هستند.

۲. ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای در هدف، مثبت هستند.

۳. تنها محدودیت‌های متغیرهای غیر پایه‌ای، محدودیت‌های نامنفی هستند.

در این مورد، می‌توان توالی پاسخ‌های رو به افزایش بهتر را بـا افـزودن مقـدار رو به افزایش بزرگ‌تر برای x_5 به دست آورد.

مثال دوم

حداکثر کردن	$z = -2x_2 + x_5 + 2$
با شرط	$x_1 = 3 - 6x_2 + 3x_5$
	$x_3 = 4 - 2x_2 + x_5$
	$x_4 = 1 + x_2 + 2x_5$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

پاسخ بهینه برای این مسئله چیست؟

تابع هدف (برای مسئله حداکثرسازی) در این مثال، در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. ضرایب متغیرهای پایه‌ای در هدف، صفر هستند.

۲. ضرایب مثبت در هدف برای متغیر غیر پایه‌ای x_5 وجود دارد.

۳. برای هر انتخاب معین $x_5 > 0$، پاسخ قابل قبولی وجود دارد که مطابق آن صرفاً متغیرهای مثبت x_5 و متغیرهای پایه‌ای جاری هستند.

در این مورد، می‌توان توالی رو به بهتر شدن پاسخ‌ها را با افزایش مقدار x_5 کسب کرد.

جهت‌های بی‌کرانی

$$\text{حداکثر کردن} \quad z = -2x_2 + x_5 + 2$$

$$x_1 = 3 - 6x_2 + 3x_5$$

$$x_3 = 4 - 2x_2 + x_5$$

$$x_4 = 1 + x_2 + 2x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

فرض شود $x_5 = \Delta$ و $x_2 = 0$

و $\Delta \geq 0$ است، آنگاه

$$x_1 = 3 + 3\Delta$$
$$x_3 = 4 + \Delta$$
$$x_4 = 1 + 2\Delta$$
$$z = \Delta$$

جهت‌های بی‌کرانی

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

زمان بی‌کران بودن پاسخ، توالی پاسخ‌های هدف بی‌کران دنبال می‌شود. از این‌رو، برای این کار، پاسخ قابل قبول x و جهت بی‌کران و y در نظر گرفته می‌شود. آنگاه برای هر مقدار Δ، پاسخ $x' + \Delta y'$، قابل قبول است.

هنگام بزرگ‌تر شدن Δ، مقدار هدف در ازای $x' + \Delta y'$، بزرگ‌تر شده و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

نکات بیش‌تر درباره جهت‌های بی‌کرانی

بردار y، جهت بی‌کرانی برای مسئله حداکثر سازی اطلاق می‌شود اگر:

۱. برای تمام پاسخ‌های قابل قبول x و برای تمام اعداد مثبت Δ، بردار $x + \Delta y$، قابل قبول باشد.

۲. مقدار هدف برای y، مثبت باشد.

برهان: اگر و فقط اگر پاسخ قابل قبول و جهت بی‌کرانی وجود داشته باشد، برنامه خطی مذکور بی‌کران است.

۲۷

ویژگی جهت بی‌کرانی برای برنامه‌های خطی مصداق دارد و برای برنامه‌های غیر خطی چنین چیزی دیده نمی‌شود. برای مثال، می‌توان ناحیه قابل قبول را در فضای دو بعدی به صورت مارپیچی تصور کرد که هدف آن هنگام حرکت متغیر در امتداد مارپیچ، بی‌انتها می‌شود. در حالی که در اسلاید مطابق تعریف، جهت بی‌کرانی دیده نمی‌شود.

بی‌کرانی: تفسیر تابلو

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	-1	=	2
0	0	2	1	0	-1	=	4
0	0	-1	0	1	-2	=	1
0	1	6	0	0	-3	=	3

حداکثر سازی برنامه خطی اگر bfs وجود داشته باشد و متغیر غیر پایه‌ای x_5 ویژگی زیر را داشته باشد، بی‌کران است:

۱. ضریب x_5، در ردیف z منفی است و

۲. تمام ضرایب در ستون x_5، «≤ 0» هستند.

در چارچوب تابلو، هدف به صورت زیر نوشته شده است

$$z + 2x_2 - x_5 = 2$$

شرایط بی‌کرانی هنگام معین بودن bfs در تابلو برای حداکثر کردن مسئله: ضریب منفی در ردیف z برای متغیر غیر پایه‌ای x_5 وجود دارد. ستون x_5 در تابلو، نامثبت است.

برای هر مقدار معین x_5، می‌توان مقادیر متغیرهای پایه‌ای جاری را برای کسب پاسخ قابل قبول تنظیم کرد. می‌توان نشان داد که مقدار هدف با میل x_5 به سمت بی‌نهایت، بی‌کران می‌شود.

یک مثال

حداکثر کردن $z = -2x_2 + x_5 + 2$

با شرط

$$x_1 = 3 - 6x_2 - 1x_5$$
$$x_3 = 4 - 2x_2 - 2x_5$$
$$x_4 = 1 + x_2 + 2x_5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

پاسخ قابل قبول پایه‌ای (bfs) برابر است با:

$x_2 = x_5 = 0;\quad x_1 = 3, x_3 = 4, x_4 = 1, z = 2$

با یکدیگر نحوه بهبود پاسخ‌ها را تعقیب می‌کنیم.

آیا می‌توان یک یا دو پاسخ یافت که bfs بهتر داشته باشد؟

۲۹

در این مثال، یکی از متغیرهای پایه x_5، ضریب مثبت در تابع هدف دارد. اما شرایط بی‌کرانی در مورد آن مصداق ندارد.

اگر مقدار x_5 را قدری بزرگ‌تر از صفر در نظر گیریم، می‌توان متغیرهای پایه‌ای فعلی را برای دستیابی به پاسخ قابل قبول تعدیل کرد و این پاسخ قابل قبول، مقدار هدف بزرگ‌تر از bfs فعلی دارد.

با افزایش مقدار x_5، مقدار تابع هدف نیز رشد خواهد کرد. بنابراین می‌توان تا حد ممکن x_5 را تا زمانی که دیگر متغیرهای پایه‌ای نامنفی باقی می‌مانند افزایش داد.

یافتن پاسخ‌های بهبود یافته

حداکثر کردن $z = -2x_2 + x_5 + 2$

با شرط

$$x_1 = 3 - 6x_2 - 1x_5$$
$$x_3 = 4 - 2x_2 - 2x_5$$
$$x_4 = 1 + x_2 + 2x_5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

تا جایی که فضا برای بهبود پاسخ‌ها وجود دارد، معادلات را تکرار می‌کنیم.

پاسخ‌های بهبود یافته: تفسیر تابلو

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	2	0	0	-1	=	2
0	0	2	1	0	2	=	4
0	0	-1	0	1	-2	=	1
0	1	6	0	0	1	=	3

$$z = \Delta + 2$$
$$x_1 = 3 - 1\Delta$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 4 - 2\Delta$$
$$x_4 = 1 + 2\Delta$$
$$x_5 = \Delta$$

یافتن متغیر ناپایه‌ای با ضریب منفی در ردیف z. متغیر را برابر Δ قرار داده، و تمام متغیرهای غیر پایه‌ای را برابر صفر در نظر می‌گیریم.

انتخاب حداکثر Δ

۳۱

با تغییر مقدار x_5 بر اساس حدس‌زنی، می‌توان پاسخ‌های بهتری یافت. لیکن برای این کار به طور سیستماتیک، آن را برابر Δ قرار می‌دهیم. از Δ به صورت یک پارامتر استفاده به عمل می‌آید.

با در نظر گرفتن Δ، می‌توان مشاهده کرد چگونه مقادیر متغیرهای پایه‌ای فعلی به صورت تابع خطی Δ تغییر خواهند کرد. تا حد ممکن Δ را بزرگ در نظر گرفته تا تمامی متغیرهای پایه‌ای کنونی نامنفی شوند. در این حالت، Δ را برابر ۲ در نظر گرفته، اگر مقداری بیش‌تر از آن در نظر گرفته شود، x_3 منفی خواهد شد.

ماجرای M & M مارا و مارنی

مارا و مارنی، دو فارغ‌التحصیل MIT هستند که به خواهران M&M معروف هستند به تازگی هدیه‌ای را از طرف والدین‌شان به میزان ۲۰۰۰ پوند M&M خاکستری و ٦۰۰۰ پوند M&M قرمز دریافت کرده‌اند. تصمیم گرفته شده تا آنها را برای جشن‌ها در بسته‌های بزرگ «MIT M&M» قرار دهیم. آنها می‌توانند بسته‌های سه بعدی M&M قرمز و دو پوندی M&M خاکستری را ۲۰ دلار به فروش رسانند. آنها می‌توانند بسته‌های سه پوندی M&M قرمز و بسته‌های چهار پوندی M&M خاکستری رنگ را ۳۰ دلار خریداری کنند. چه میزان بسته‌هایی را مارا و مارنی می‌توانند خرید و فروش کنند تا سودشان به حداکثر رسد.

بسته‌های بسیار بزرگ M&M را می‌توان با تخفیف خریداری کرد و رنگ آنها نیز قابل انتخاب است. شما همچنین می‌توانید هر عبارت خیر مقدمی (نظیر دوست دارم ۱۵/۰۵۳) را روی بسته‌ها بنویسید. برای کسب جزئیات بیش‌تر به سایت http://www.Mymms.com مراجعه شود.

فرموله کردن برنامه خطی

- x_1 = تعداد بسته‌های ۷ پوندی خریداری شده (برحسب هزار)

- x_2 = تعداد بسته‌های ۵ پوندی فروخته شده (برحسب هزار)

- میزان سود = ۱۰/۰۰۰ دلار

برنامه خطی دو متغیره

حداکثر کردن $z = -3x_1 + 2x_2$

با شرط

$$-3x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$-4x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

حداکثر کردن $z = -3x_1 + 2x_2$

با شرط

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$-4x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0$$

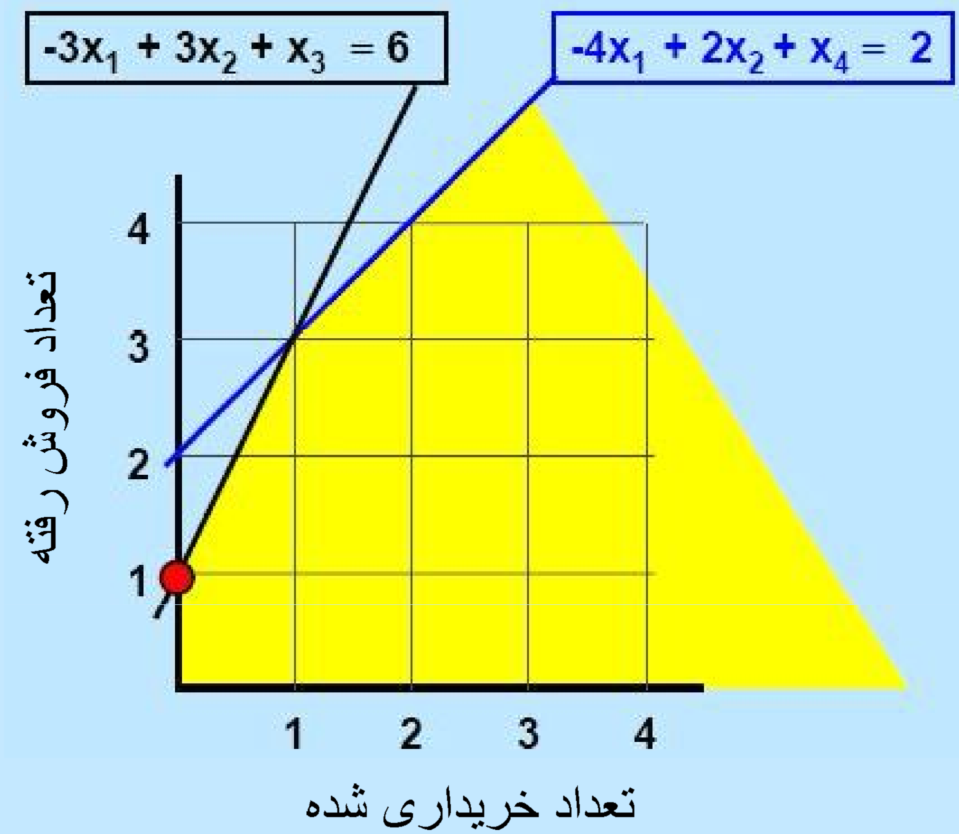
z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

ابتدا متغیرهای کمبود x_3 و x_4 را به دستگاه معادلات برنامه اضافه می‌کنیم.

سپس معادلات را به شکل تابلو ارائه می‌کنیم.

گفتنی است که تابع اولیه، به شکل استاندارد است و bfs متناظر یافت می‌شود.

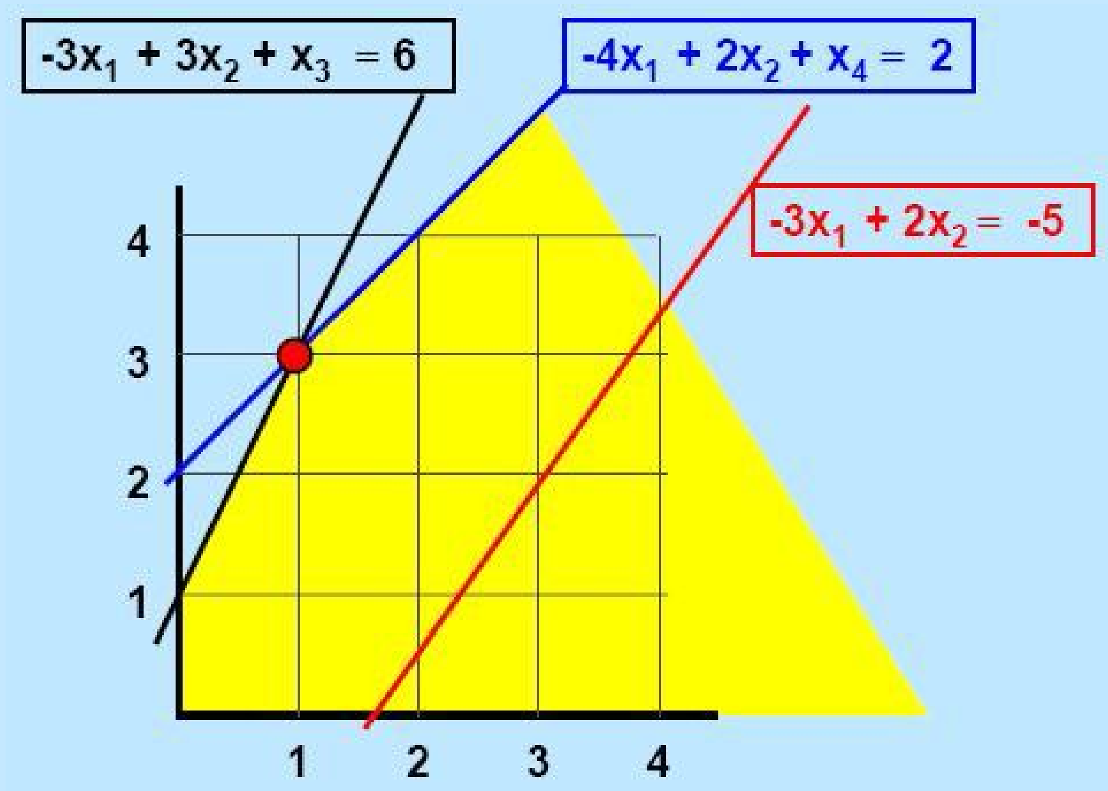
نمایش فضای دو بعدی



۳۵

برای این برنامه خطی خاص، ناحیه قابل قبول بی‌کران است لیکن پاسخ بهینه وجود دارد.

نمایش فضای دو بعدی



۳۶

پاسخ بهینه $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ خواهد بود. مقدار متغیرهای کمبود، صفر هستند.

شکل برنامه خطی استاندارد

تابلوی اولیه هم‌اکنون در شکل استاندارد است.

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

متغیرهای پایه‌ای، x_4, x_3, z هستند.

متغیرهای غیر پایه‌ای، x_1, x_2 هستند.

پاسخ قابل قبول پایه‌ای (bfs) برای این پایه برابر است با:

$$z = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 2$$

شکل استاندارد برنامه خطی و bfs (پاسخ قابل قبول پایه‌ای)

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

متن درس z را به عنوان متغیر پایه‌ای در نظر می‌گیرد.

روش سیمپلکس با تنظیم تابلوی استاندارد برای برنامه خطی آغاز می‌شود (یا شکل استاندارد در مرحله قبل از آغاز عملیات تنظیم می‌شود)

پاسخ اول، bfs برای آن تابلو است.

در درس بعدی بحث خواهد شد اگر راه مشخصی برای تنظیم تابلوی استاندارد یافت نشود چه کار باید کرد؟

برای هر محدودیت، یک متغیر پایه‌ای وجود دارد

	z	x_1	x_2	x_3	x_4		
تابع هدف	1	3	-2	0	0	=	0
محدودیت اول	0	-3	3	1	0	=	6
محدودیت دوم	0	-4	2	0	1	=	2

یک متغیر پایه‌ای، z است.

محدودیت ۱: متغیر پایه‌ای، x3 است.

محدودیت ۲: متغیر پایه‌ای، x4 است.

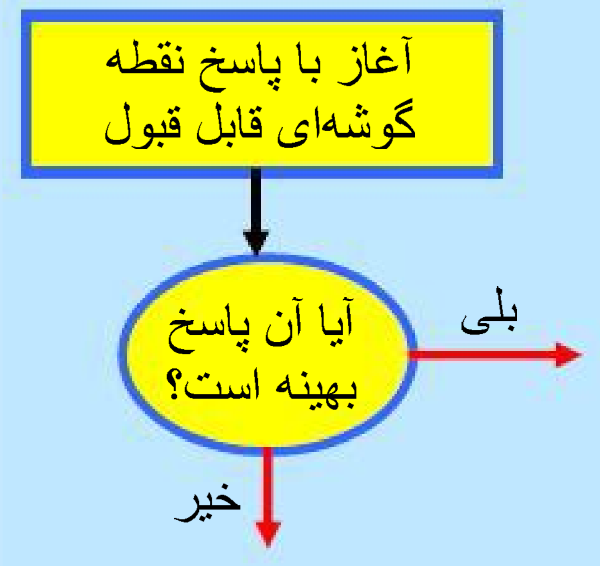
bfs

$x_1 = 0; x_2 = 0;$

$x_3 = 6; \ x_4 = 2;$

$z = 0$

الگوریتم سیمپلکس (برای مسائل حداکثرسازی)



از اینکه می‌توان bfs قابل قبول، عملیات را آغاز کرد، خوشحال هستیم، ادامه الگوریتم را پی می‌گیریم.

درس بعدی: نحوه پیدا کردن bfs آغازین است.

شرایط بهینگی

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

ضریب هزینه x_2، 2- است.

$z + 3x_1 - 2x_2 = 0$

اگر $x_1 = 0$ و
$x_2 = 1$ باشد
آنگاه، $z = 2$

bfs فعلی را می‌توان اگر x_2 را افزایش داد و x_1 را
در سطح صفر نگه داشت، بهبود بخشید.

$$z + 3x_1 - 2x_2 = 0$$

پاسخ بهتر را با افزایش x_2 در بالای صفر و تنظیم متغیرهای پایه‌ای فعلی برای کسب پاسخ قابل قبول می‌توان به دست آورد.

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

اگر با افزایش x_2، تابع هدف بهبود یابد، بگذارید تا حد ممکن، آن مقدار افزایش یابد!

اما اگر x_2 افزایش یابد، یا میزان قابل قبول را از دست می‌دهیم یا آن را کسب می‌کنیم.

کله‌ور و MIT برنده شدند

تیم، باخت

کله‌ور و تیم به موضوع‌های اصلی دست یافتند.

چرخش سیمپلکس

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

راه انجام دادن آن،
افزایش x_2 و اصلاح
همزمان متغیرهای
پایه‌ای با حفظ قابل
قبول بودن است، کاری
ساده است اما قدری
دقت می‌خواهد.

کله‌ور

اشتیاق کله‌ور را برای این مطلب می‌ستایم.

تیم همیشه سؤال‌های خوبی می‌پرسد، در حالی که پاسخ بسیاری از آنها را نمی‌داند.

پاسخ قابل قبول پایه‌ای فعلی (bfs)، بهینه نیست!

$x_2 = \Delta$

$x_1 = 0,$

زیرا، مقدار متغیر غیر پایه‌ای دیگر، تغییر نیافتند.

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

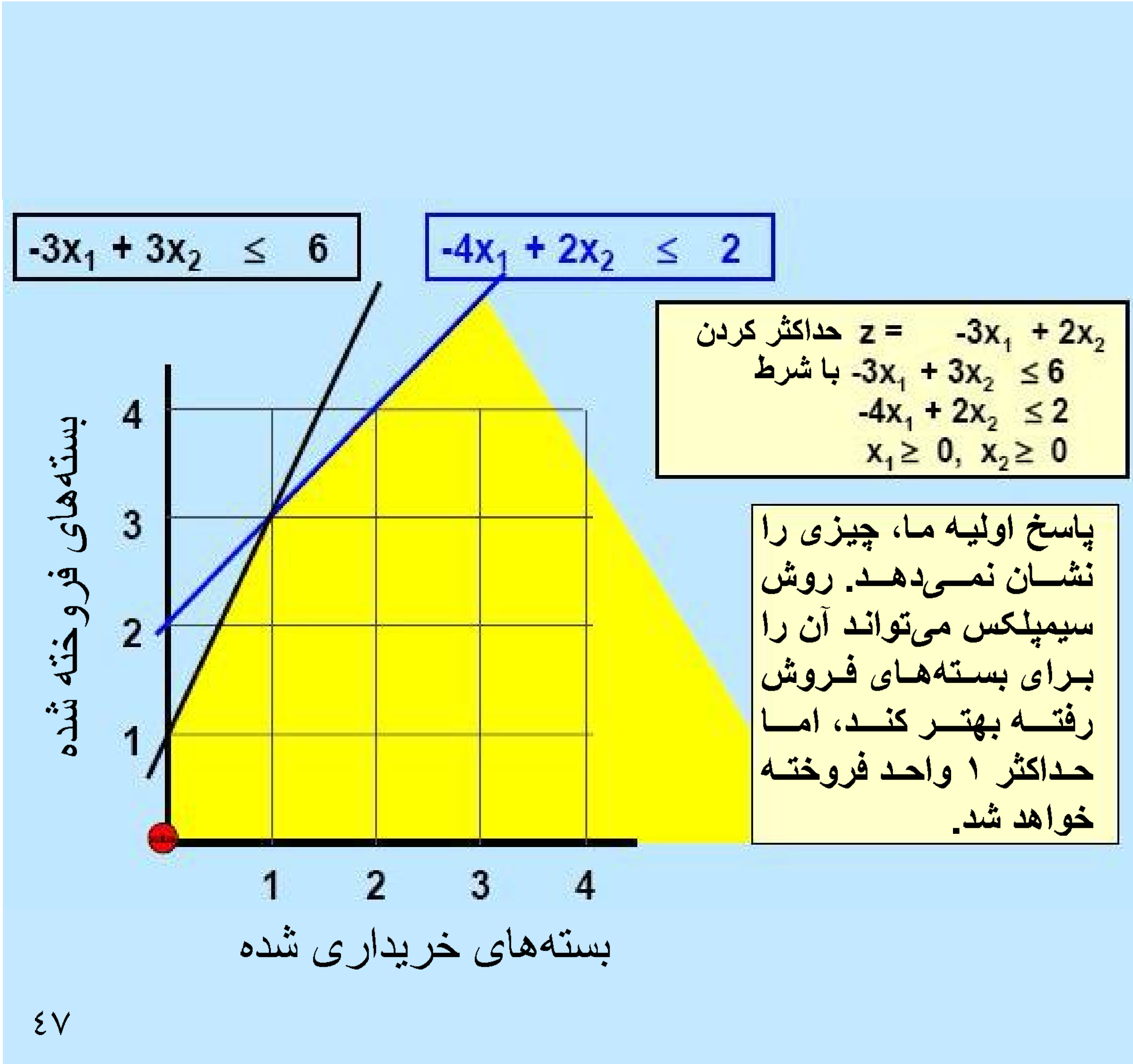
$z = 2\Delta.$
$x_3 = 6 - 3\Delta.$
$x_4 = 2 - 2\Delta.$

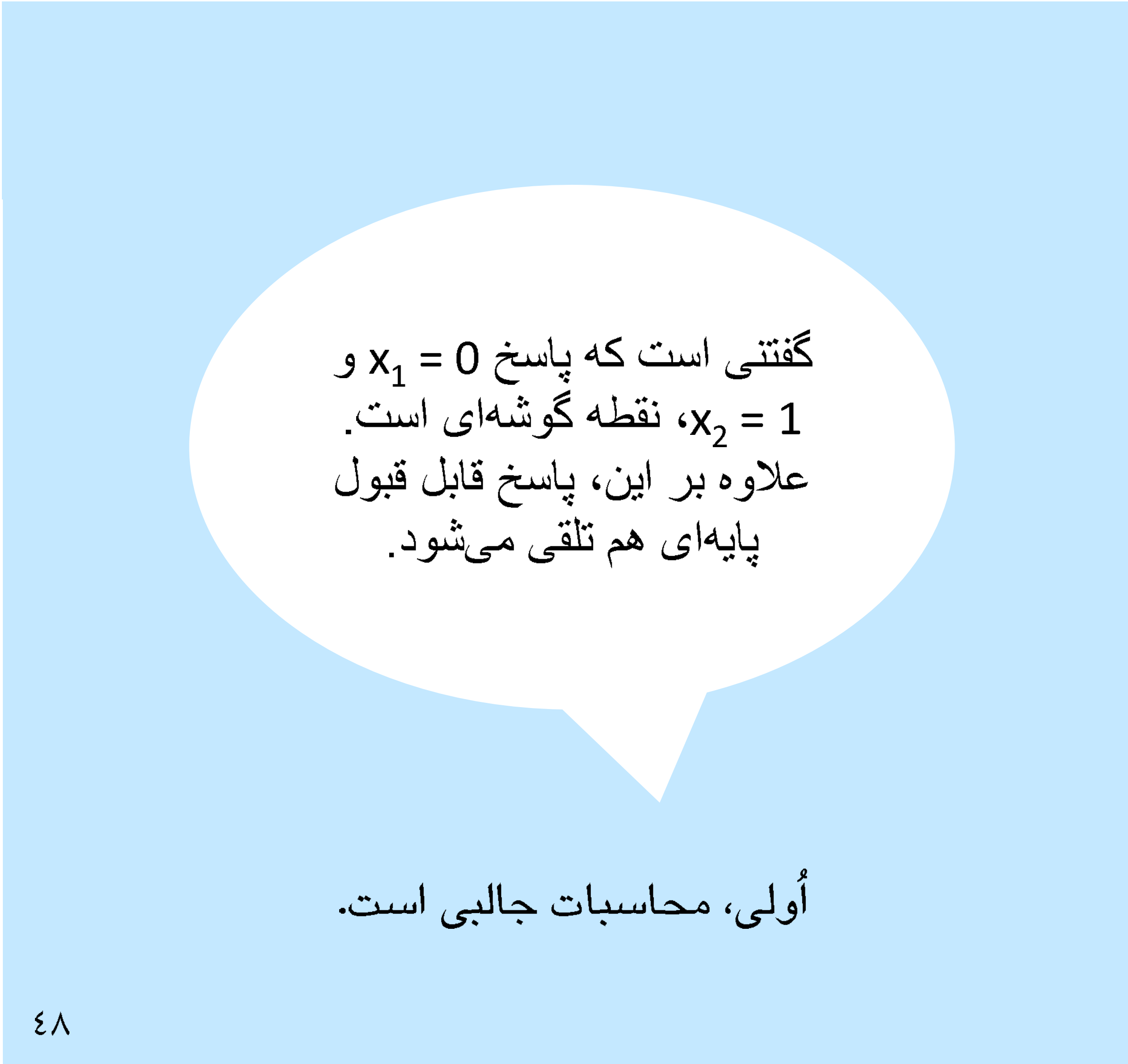
انتخاب Δ تا حد ممکن بزرگ به گونه‌ای که تمام متغیرها نامنفی باقی بمانند. یعنی، پاسخ، قابل قبول باقی می‌ماند.

$\Delta = 1$

$z = 2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0.$

گاهی اوقات، خودم را در جای مدرس در نظر می‌گیرم.


$-3x_1 + 3x_2 \leq 6$
$-4x_1 + 2x_2 \leq 2$
حداکثر کردن $z = -3x_1 + 2x_2$
با شرط $-3x_1 + 3x_2 \leq 6$
$-4x_1 + 2x_2 \leq 2$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
پاسخ اولیه ما، چیزی را نشان نمی‌دهد. روش سیمپلکس می‌تواند آن را برای بسته‌های فروش رفته بهتر کند، اما حداکثر ۱ واحد فروخته خواهد شد.
بسته‌های فروخته شده
بسته‌های خریداری شده
1
2
3
4
٤٧



تمام bfsهای مربوط به پاسخ‌های نقطه گوشه‌ای است. اُولی آن را می‌دانست، اما تصمیم می‌گیرد که فقط به شما پاسخ خاص را بگوید.

چرخش برای به دست آوردن bfs

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	-2	0	0	=	0
0	-3	3	1	0	=	6
0	-4	2	0	1	=	2

متغیـر غیـر پایـه‌ای x_2، پایه‌ای می‌شود.

انتخاب ستون ۲

متغیــر پایــه‌ای x_4، غیر پایه‌ای می‌شود.

$z = 2, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0.$

در تکرار بعدی، می‌خواهیم ستون دوم چنین شود:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجا که x_2 را جایگزین x_4 کرده‌ایم، سـتون x_2 بعـد از تکـرار (چـرخش) برابـر ستون x_4 پیش از چرخش (تکرار) خواهد شد. به این طریق، بعـد از چـرخش هنـوز شکل استاندارد را داریم.

چرخش برای به دست آوردن پاسخ بهتر

پاسخ جدید: متغیرهای پایه‌ای
z, x_2, x_3

متغیرهای غیر پایه‌ای x_1, x_4

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	-1	0	0	1	=	2
0	3	0	1	-1.5	=	3
0	-2	1	0	.5	=	1

$z = 2$
$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$
$x_4 = 0$

۵۰

گفتنی است که bfs بعد از چرخش دقیقاً آن چیزی خواهد شد که می‌خواستیم. با فرض $x_2 = \Delta$ و افزایش Δ از صفر به یک، در امتداد لبه ناحیه قابل قبول حرکت می‌کنیم. در انتهای لبه، نقطه گوشه‌ای دیگر وجود دارد.

خلاصه الگوریتم سیمپلکس

■ شروع در شکل متعارف (استاندارد) با پاسخ قابل قبول پایه‌ای

۱. بررسی شرایط بهینگی.

۲. اگر پاسخ بهینه نبود، متغیر غیر پایه‌ای تعیین می‌شود که باید مثبت شود.

۳. افزایش متغیر غیر پایه‌ای مذکور و اجرای چرخش، و یافتن bfs جدید.

٤. ادامه کار تا دستیابی به پاسخ بهینه (یا بی‌کران).

این را با دوستان‌تان در ظرف دو دقیقه انجام دهید.

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	a	0	0	0	=	3
0	b	0	1	0	=	6
0	c	1	0	0	=	3
0	d	0	0	1	=	5

مقادیر b, c و d مجهول هستند.

۱. متغیرهای پایه‌ای کدام‌ها هستند؟ bfs فعلی کدام است؟

۲. تحت چه شرطی، بهینه bfs فعلی کدام است؟

این را با دوستان‌تان در ظرف سه دقیقه انجام دهید.

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	a	0	0	0	=	3
0	b	0	1	0	=	6
0	c	1	0	0	=	3
0	d	0	0	1	=	5

۱. x_1 را برابر Δ قرار داده، مقادیر x_2، x_3 و x_4 را پیدا کرده و تمام آنها را بر حسب Δ ارائه می‌دهید.

۲. با فرض $b > 0$ و $d < 0$، در تحت چه شرطی می‌توان $\Delta = 3/c$ را تنظیم کرد؟

۳. اگر $\Delta = 3/c$، عدد چرخش بعدی چه خواهد بود؟

شناسایی بی‌کرانی

اگر ضرایب غیر هزینه‌ای در ستون ورودی: ≤ 0 هستند، آنگاه پاسخ بی‌کران خواهد بود.

$$z - x_1 + x_4 = 2$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	-1	0	0	1	=	2
0	-3	0	1	-1.5	=	3
0	-2	1	0	.5	=	1

$z = 2 + \Delta$
$x_1 = \Delta$
$x_2 = 1 + 2\Delta$
$x_3 = 3 + 3\Delta.$
$x_4 = 0$

Δ را می‌توان تا ∞ رشد داد و سپس z را به آن سمت کشاند.

قدم بعدی: دو تکرار بیشتر

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	-1	0	0	1	=	2
0	3	0	1	-1.5	=	3
0	-2	1	0	.5	=	1

$z - x_1 + x_4 = 2$

$z = 2 + \Delta$
$x_1 = \Delta$
$x_2 = 1 + 2\Delta$
$x_3 = 3 - 3\Delta.$
$x_4 = 0$

ضریب مخارج x_1 در ردیف z نامنفی است. $x_1 = \Delta$ و $x_4 = 0$ قرار داده می‌شود و سپس $\Delta = 3/3$ می‌شود.

چرخش دیگر

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	0	+1/3	+1/2	=	3
0	1	0	1/3	-1/2	=	1
0	0	1	2/3	-1/2	=	3

$z = 3$
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

بزرگ‌ترین مقدار Δ، $3/3$ است.

متغیر x_1 پایه‌ای و x_3 غیر پایه‌ای می‌شود. از این رو، x_1 برای محدودیت ۱، پایه‌ای می‌شود. چرخش در حول عدد چرخش که ۳ است صورت می‌گیرد.

بررسی بهینگی

$$z + x_3/3 + x_4/2 = 3$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	0	+1/3	+1/2	=	3
0	1	0	1/3	-1/2	=	1
0	0	1	2/3	1/2	=	3

$z = 3$
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

عدد / ضریب منفی در ردیف z وجود ندارد.

پاسخ قابل قبول پایه‌ای فعلی، بهینه است!

دو نظر درباره روش سیمپلکس

- بهبود با حرکت در امتداد لبه
  - افزایش دادن Δ و افزایش دادن Z.
  - روش برای دیگر مراحل استفاده شود و نشان دهید چه نتایجی به دست می‌آیند.
- بهبود با حرکت در نقطه گوشه‌ای مجاور
  - حرکت به سمت نقطه گوشه‌ای مجاور و افزایش مقدار Z.
  - این کار به عنوان راه میان‌بر در نظر گرفته می‌شود.

خلاصه الگوریتم سیمپلکس

- آغاز در چارچوب استاندارد با پاسخ قابل قبول پایه‌ای

۱. بررسی شرایط بهینگی
   - آیا در ردیف هزینه ضریب منفی وجود خواهد داشت؟

۲. اگر مقدار بهینه یافت نشد، متغیر غیر پایه‌ای تعیین شود که باید مثبت شود.
   - انتخاب متغیر با ضریب منفی در ردیف هزینه.

۳. افزایش متغیر غیر پایه‌ای و اجرای چرخش (تکرار)، کسب bfs جدید (یا بی‌کراندار)
   - بازنگری این مرحله و ارائه راه میان‌بر

٤. ادامه مراحل تا نیل به پاسخ بهینه (یا بی‌کران)

قاعده نسبت حداقل برای تعیین متغیر خروج از پایه

$z - 3x_1 = 3$

z	x_1	x_2	x_3	x_4		RHS
1	-3	0	0	0	=	3
0	3	1	0	0	=	6
0	-2	0	1	0	=	1
0	2	0	0	1	=	5

$z = 3 + 2\Delta$
$x_1 = \Delta$
$x_2 = 6 - 3\Delta$
$x_3 = 1 + 2\Delta$
$x_4 = 5 - 2\Delta$

Δ= حداقل (5/2 و 6/3). در تکرار بعدی، چرخش در حول عـدد 3 خواهد بود.

نسبت: ضریب RHS / ورود ضریب ستون

به شرط: ورود ضریب ستون مثبت

نکات بیش‌تر درباره نحوه اجرای چرخش

- برای تعیین ستون چرخش، متغیری با ضریب هزینه‌ای منفی انتخاب شود.

- برای تعیین ردیف چرخش، ضریبی بر اساس قاعده نسبت حداقل انتخاب شود.

- اجرای چرخش به موازات حل دستگاه معادلات.

درس بعدی: نکات بیش‌تر درباره الگوریتم سیمپلکس